

# Dokumentations- notat til beskrivelse af Forsyningssekre- tariatets SFA-model

September 2020



---

**Dokumentationsnotat til beskrivelse af Forsyningssekretariatets SFA-model**

**Konkurrence- og Forbrugerstyrelsen**

Carl Jacobsens Vej 35  
2500 Valby  
Tlf.: +45 41 71 50 00  
E-mail: [kfst@kfst.dk](mailto:kfst@kfst.dk)

Online ISBN 978-87-7029-736-3

Dokumentationsnotatet er udarbejdet af  
Konkurrence- og Forbrugerstyrelsen.

September 2020

# Indhold

---

Kapitel 1	4
<b>Introduktion</b> .....	<b>4</b>
1.1 Hvad er en SFA-model og hvorfor er den relevant til benchmarking? .....	4
1.2 Ændringer i Forsyningssekretariatets SFA-model til benchmarking i 2020.....	5
Kapitel 2	6
<b>SFA-modellens egenskaber</b> .....	<b>6</b>
2.1 SFA er en regressionsanalyse, der kan anvendes til at estimere inefficiens.....	6
2.2 Efficiensmål i SFA-modeller .....	10
2.3 Omkostningsfunktionens form og dennes betydning i SFA-modellen .....	11
2.4 Identifikation og håndtering af observationer med stor indflydelse på estimerterne .....	16
2.5 Låsning af en SFA-model.....	17
Kapitel 3	19
<b>Ændringer i Forsyningssekretariatets SFA-model</b> .....	<b>19</b>
3.1 SFA-modellen kontrollerer direkte for rammebetingelser.....	19
3.2 Ændring af funktionsformen.....	20
3.3 Pseudo-Cook's Distance og forskelligartethed blandt vandselskaberne.....	23
Litteratur	25
Appendiks 1	26

---

# Kapitel 1

## Introduktion

---

Forsyningssekretariatet har siden 2016 anvendt to forskellige metoder til benchmarking af de største vand- og spildevandsselskaber i Danmark. Modellerne er henholdsvis en Data Envelopment Analysis-model (DEA) og en Stochastic Frontier Analysis-model (SFA). Begge metoder er anerkendte og udbredte. Før 2016 anvendtes alene en DEA-model. Formålet med at have to metoder er at udnytte metodernes respektive styrker til at estimere selskabernes efficiens så robust og retvisende som muligt.

Dette notat dokumenterer den version af SFA-modellen, der anvendes til benchmarking fra 2020, samt de analyser som ligger til grund for specificeringen af modellen. Dette notat præsenterer desuden det teoretiske grundlag for SFA-modeller nogle af de empiriske problemstillinger, der opstår i arbejdet med SFA-modeller, og hvordan de kan løses. Yderligere information om benchmarking af vandsektoren generelt kan findes på Konkurrence- og Forbrugerstyrelsens hjemmeside.<sup>1</sup>

Benchmarking er en metode til at sammenligne vandselskabers performance for at bestemme deres individuelle omkostningsefficiens opgjort ved en såkaldt efficiensscore. Det er en score mellem nul og én, hvor én indikerer, at selskabet er fuldstændig omkostningsefficient.<sup>2</sup> Efficiensscoren indgår i fastlæggelsen af hvert selskabs individuelle effektiviseringskrav, som selskaberne får udmeldt i de økonomiske rammer.

### 1.1 Hvad er en SFA-model og hvorfor er den relevant til benchmarking?

SFA er en udbredt benchmarkingmodel, der er i stand til at tage højde for både inefficiens og generel støj i data. Med SFA anvendes regressionsanalyse til at sammenligne selskaber og bestemme deres efficiens. Selskaberne sammenlignes på baggrund af deres faktiske omkostninger og outputs, hvor sidstnævnte er et udtryk for det, selskaberne producerer.<sup>3</sup>

SFA er grundlæggende en metode til estimation af en produktions- eller omkostningsfunktion, hvor fejleddet er sammensat af et støjled og et inefficiensled.<sup>4</sup> Stort set alle datasæt og modeller påvirkes af støj, hvilket kan skyldes målefejl, udeladte variable, etc., men det kan også skyldes inefficiens. Som konsekvens heraf foreslog Meeusen og van den Broeck (1977) og Aigner, Lovell og Schmidt (1977) SFA-metoden. At SFA-metoden tager højde for støj i estimationen af efficiensscore medfører, at den er mindre følsom over for positive outliers end DEA-modellen og hvis OLS anvendes til at estimere en sektors omkostningsfunktion.

---

<sup>1</sup> Baggrundsmateriale og årlige metodepapirer findes på Forsyningssekretariatets hjemmeside: <https://www.kfst.dk/vandtilsyn/benchmarking/>

<sup>2</sup> For DEA gælder det, at en score på én indikerer, at selskabet er et af de – eller dét – mest omkostningsefficiente selskab.

<sup>3</sup> I benchmarking af vandsektoren antages, at selskaberne ikke har mulighed for at øge deres output, men at de derimod kan reducere deres omkostninger, for at opnå en højere effektivitet.

<sup>4</sup> Dette er ikke muligt i DEA-modellen, hvor al uoverensstemmelse mellem et selskabs effektivitet og frontselskabernes effektivitetsniveau tilskrives inefficiens. Ligeledes er det ikke muligt at identificere både støj og inefficiens ved en simpel OLS-regression.

---

En oplagt fordel ved at anvende SFA-modellen er, at det er relativt let at kontrollere for rammebetingelser. Konkret for vandsektoren betyder det fx, at der kan kontrolleres for hvor tæt et selskabs kunder ligger på hinanden og dermed, hvor kompleks infrastrukturen er over og under jorden, hvilket potentielt kan påvirke et selskabs mulighed for at være omkostningsefficient i sammenligning med de øvrige selskaber. SFA-metoden gør det muligt at kontrollere direkte for sådanne forskelle i rammebetingelser mellem selskaberne. Når der kontrolleres for forskelle i rammebetingelser betyder det, at disse forskelle ikke påvirker de estimerede efficiensscorer.

Ovenstående egenskaber og fordele ved SFA-metoden gør, at den er velegnet til estimation af efficiensscorer blandt selskaberne i vandsektoren.

## 1.2 Ændringer i Forsyningssekretariatets SFA-model til benchmarking i 2020

Vi arbejder løbende på at forbedre benchmarkingmodellerne, der anvendes til at fastsætte individuelle effektiviseringskrav. Det betyder, at der løbende sker ændringer i modellerne. Formålet er at de skal være så retvisende og robuste som muligt. I efteråret 2019 og foråret 2020 har Forsyningssekretariatet videreudviklet den eksisterende SFA-model. Ændringerne og argumenterne herfor er beskrevet i dette dokumentationsnotat. Konkret er der foretaget tre ændringer i SFA-modellen. Der er:

- » Ændret omkostningsfunktionsform fra en Cobb-Douglas til en restringeret translog. Denne ændring foretages for at udnytte translog-omkostningsfunktionens større fleksibilitet til at tilpasse sig produktionsstrukturen i vandsektoren. At translog-funktionsformen er restringeret betyder, at koefficienterne korrigeres i den estimerede translog-omkostningsfunktion, så det sikres, at denne ikke bryder med monotonicitetsantagelsen for en eller flere observationer. Monotonicitetsantagelsen betyder, at et selskabs omkostningsefficiens ikke falder, hvis selskabet øger sin produktion uden at selskabets omkostninger øges. Antagelsen er vigtig, da den kan have betydning for selskabernes estimerede efficiensscorer, hvis den ikke er overholdt. Derfor anvendes en model, som sikrer, at monotonicitetsantagelsen er opfyldt for alle observationer.
- » Kontrolleret direkte for rammebetingelserne alder og tæthed i SFA-modellen. Det betyder, at SFA-modellen bliver i stand til direkte at tage højde for, hvordan alder og tæthed påvirker omkostningerne, hvorved rammebetingelserne ikke kommer til at påvirke efficiensscorerne. Da SFA-modellen kontrollerer direkte for rammebetingelser, anvendes de ukorrigerede netvolumenmål i SFA-modellen. Der anvendes dermed kun én SFA-model i stedet for tre som tidligere.
- » Udviklet en ny metode til at identificere graden af indflydelse en observation har på SFA-modellens resultater kaldet Pseudo-Cook's Distance. Den er udviklet til at kunne beregne et selskabs indflydelse på selskabernes efficiensscorer, inklusiv selskabets egen efficiensscore (eller selskabernes forventede omkostninger). Identificeres et selskab til at have stor indflydelse på efficiensscorerne, er det ikke ensbetydende med, at selskabet er problematisk i SFA-modellen eller at det skal behandles som en outlier. En høj Pseudo-Cook's Distance opstår, hvis selskabet er vigtigt i forhold til at trække SFA-modellen hen i mod eller væk fra de sande koefficienter. Selskaber med høj Pseudo-Cook's Distance bør derfor undersøges nærmere i en konkret, individuel vurdering for at fastlægge, om det skal behandles som outlier.

Formålet med ændringerne er at gøre vores SFA-model mere retvisende og robust. De første to ændringer fører til bedre statistiske egenskaber ved SFA-modellen, der i højere grad er i overensstemmelse med det forudsatte og derfor bedre belyser sammenhængen mellem omkostninger og forklarende variable. Det fører til mere præcise estimater for efficiensscoren. Den tredje ændring introducerer et mere præcist mål for graden af indflydelse et selskab har på efficiensscorerne i forhold til, hvad der tidligere er blevet anvendt, men dette mål har ikke i sig selv ført til, at flere eller færre selskaber identificeres som outliers.

---

## Kapitel 2

# SFA-modellens egenskaber

### 2.1 SFA er en regressionsanalyse, der kan anvendes til at estimere inefficiens

SFA er en regressionsanalyse til at estimere inefficiens med udgangspunkt i en produktions- eller omkostningsfunktion. Efficiens kan generelt anskues som et selskabs evne til at udnytte sine ressourcer bedst muligt.<sup>5</sup>

De fleste SFA-modeller tager afsæt i en produktionsfunktion. En produktionsfunktion beskriver hvordan input transformeres om til output. Produktionsfunktionen bestemmer altså, hvor meget et selskab kan producere ved en given mængde input, og er givet ved

$$y = f(x), \quad (1)$$

hvor  $y$  er outputmængden,  $x$  er en vektor af inputmængder og  $f(\cdot)$  er produktionsfunktionen. Under antagelse af, at selskaberne er omkostningsminimerende, kan selskabernes omkostninger beskrives ved omkostningsminimeringsproblemet

$$c(w, y) = \min_x \sum_{i=1}^n w_i x_i \quad (2)$$

$$\text{st. } f(x) \geq y,$$

hvor  $c(w, y)$  er en omkostningsfunktion,  $w_i$  er prisen for input  $i$ , og  $x_i$  er mængden af input  $i$ . Det betyder, at en omkostningsfunktion angiver det minimale omkostningsniveau, som er nødvendigt for (som minimum) at producere outputmængden  $y$ . Omkostningsfunktioner anvendes bl.a. til benchmarking af vandsektoren, fordi selskabernes evne til at omkostningsminimere er centralt.

Omkostningsfunktionen kan estimeres ved brug af standardestimatoren OLS.<sup>6</sup> I det tilfælde er estimationsligningen

$$c = c(w, y) + r, \quad (3)$$

hvor  $r$  er residualen, som også kaldes fejleddet. Fejleddet udtrykker i ovenstående ligning den del af omkostningerne, som de forklarende variable  $w$  og  $y$  ikke kan forklare. Når omkostningsfunktionen estimeres ved brug af OLS, er det imidlertid ikke muligt at adskille inefficiens fra stokastisk støj i residualen. Det betyder, at variationen i omkostningerne – for givne inputpriser og outputmængder – kun tilskrives stokastisk støj og ikke, at selskaberne er forskellige i deres ressourceudnyttelse. Når vandselskabernes omkostninger estimeres med OLS antages

<sup>5</sup> Efficiensmål uddybes i afsnit 2.2.

<sup>6</sup> OLS står for Ordinary Least Squares og er en almindelig metode til regressionsanalyse, der estimerer parameterværdier i en lineær regression ved brug af mindste kvadraters metode.

det derfor implicit, at alle selskaber er efficiente. Dette er ikke en rimelig antagelse, hvilket betyder, at OLS ikke er velegnet til estimation af omkostningsfunktionen.

Eftersom der er inefficiens blandt selskaberne, kan man i stedet estimere omkostningsfunktionen ved brug af SFA. I det tilfælde er estimationsmodellen givet ved

$$c = c(w, y) + u + v, \quad (4)$$

hvor  $v$  er stokastisk støj, mens  $u \geq 0$  er omkostningsinefficiens.  $v$  og  $u$  er et sammensat fejleled, og udgør tilsammen residualen i SFA-modellen,  $r = v + u$ . Det betyder, at SFA-modellen fordeler den statistiske usikkerhed i reel stokastisk støj og inefficiens.<sup>7</sup> Stokastisk støj indeholder, som i OLS-modellen, den del af variationen i den uafhængige variabel, som modellen ikke kan forklare, fx måleusikkerhed, unøjagtigheder i datasættet, udeladte forklarende variable, og/eller approksimationsfejl i funktionsformen. Forskellen fra OLS ligger altså i, at den selskabsspecifikke inefficiens indgår særskilt i modelspecifikationen, hvorfor det ikke fremgår af det stokastiske støjled.

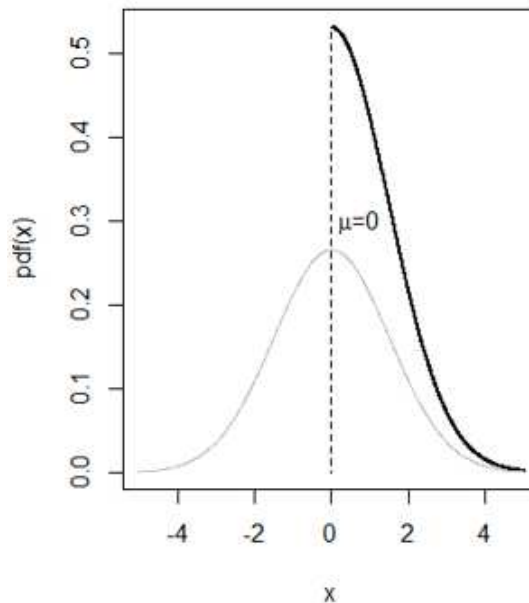
Når en SFA-model estimeres, gøres der blandt andet antagelser om fordelingerne af det stokastiske støjled,  $v$ , og inefficiensleddet,  $u$ . Ofte antages det, at  $v$  er normalfordelt, dvs.  $v \sim N(0, \sigma_v^2)$ , mens inefficiensleddet er enten positivhalvnormalfordelt, dvs.  $u \sim N^+(0, \sigma_u^2)$  eller positiv trunkeret normalfordelt,  $u \sim N^+(\mu, \sigma_u^2)$ . Antagelsen er væsentlig, da fordelingerne danner grundlag for estimationen af modellens parametre og derfor også selskabernes efficiensscorer.<sup>8</sup>

I vores benchmarking antager vi, at det stokastiske støjled er normalfordelt,  $v \sim N(0, \sigma_v^2)$ , og at inefficiensen er halvnormalfordelt,  $u \sim N^+(0, \sigma_u^2)$ . Fordelingerne er illustreret i Figur 2.1.

<sup>7</sup> SFA-modellen bruger en maximum-likelihood estimator til at estimere modelparametrene, hvorfra selskabernes efficiensscorer kan beregnes. Konkret foregår det ved at maksimere en likelihood-funktion, som bruger modellens parametre samt fordelingerne af  $v$  og  $u$  til at finde de værdier, som samlet set giver den højeste værdi af likelihood-funktionen. Det vil sige de parameter-værdier, der – for givne værdier af de forklarende variable i datasættet – maksimerer sandsynligheden for at opnå værdierne af den afhængige variabel. Dette foregår gennem en iterativ proces, hvor en maksimeringsalgoritme afsøger kombinationerne af SFA-modellens parametre. Mere information om maximum-likelihood estimatoren kan bl.a. ses i Bogetoft og Otto (2011).

<sup>8</sup> De sande fordelinger af den stokastiske støj og inefficiens kendes ikke. Forsyningssekretariatets SFA-model gør brug af standardantagelserne i dette tilfælde.

Figur 2.1 Normal- og positiv halvnormalfordeling som antages i Forsyningssekretariatets SFA-model



**Anm.:** Den lysegrå graf illustrerer en normalfordeling med middelværdi  $\mu = 0$  og den sorte graf illustrerer en positiv halvnormalfordeling. Bemærk at i illustrationen er  $\sigma_u^2 = \sigma_v^2$ , hvilket formodentlig ikke er tilfældet.  $\sigma_u^2$  og  $\sigma_v^2$  bestemmes begge fra SFA-modellen.

*Kilde: Egen illustration*

### Valg af funktionsform

Formel (1) og (2) er generiske udtryk for hhv. en produktions- og en omkostningsfunktion. Når disse skal estimeres empirisk, er det nødvendigt at vælge en konkret funktionsform.<sup>9</sup> Funktionsformen danner grundlag for de antagelser, der gøres om produktionsteknologien, og giver et eksplicit, matematisk udtryk for produktionsteknologien, som kan estimeres. Idet funktionsformen indeholder eksplicitte antagelser om produktionsteknologien, er det vigtigt at overveje, hvilke egenskaber den valgte funktionsform har.

En kendt og meget anvendt funktionsform er Cobb-Douglas-formen. Boks 2.1 giver et eksempel på, hvordan den funktionelle form af en omkostningsfunktion opstår med udgangspunkt i Cobb-Douglas produktionsfunktionen.

<sup>9</sup> Det skal bemærkes, at der findes ikke-parametriske regressionsmetoder, der ikke antager en konkret funktionsform, herunder også ikke parametriske SFA specifikationer. Fælles for disse er dog, at de har brug for datasæt med rigtig mange observationer, hvilket ikke er tilgængeligt for vandsektoren.



### Boks 2.1 Cobb-Douglas omkostningsfunktionen

Cobb-Douglas-omkostningsfunktionen er givet ved (Henningsen, 2019)

$$c(w, y) = A \left( \prod_{i=1}^n w_i^{\alpha_i} \right) \left( \prod_{i=1}^m y_i^{\beta_i} \right), \quad (\text{b.1.1})$$

hvor  $A$ ,  $\alpha_i$  og  $\beta_i$  er parametre,  $n$  er antallet af inputs og  $m$  er antallet af forskellige outputs.

Formen kan udvides til at inkludere specifikke rammebetingelser, som i vandsektoren fx kan være alderen på selskabernes aktiver, og hvor tætbeholdt et selskabs forsyningsområde er (betegnet tæthed). Inkluderes rammebetingelser er Cobb-Douglas omkostningsfunktionen således

$$c(w, y, z) = A \left( \prod_{i=1}^n w_i^{\alpha_i} \right) \left( \prod_{i=1}^m y_i^{\beta_i} \right) \left( \prod_{i=1}^k e^{\delta_i z_i} \right), \quad (\text{b.1.2})$$

hvor  $\delta_i$  er en parameter og  $k$  er antallet af rammebetingelser ( $z$ ) i regressionen.

For at estimere formel (b.1.2), logaritmetransformeres den med den naturlige logaritme:

$$\log(c(w, y, z)) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \log(w_i) + \sum_{i=1}^m \beta_i \log(y_i) + \sum_{i=1}^k \delta_i z_i \quad (\text{b.1.3})$$

Hvor  $\alpha_0 = \log(A)$ . Det fremgår af formel (b.1.3), at omkostningsniveauet afhænger af prisen på input, hvor meget output, der produceres, og hvilke specifikke rammebetingelser et selskab er underlagt. Er rammebetingelserne ikke med, antages det implicit, at virksomhederne har ens rammebetingelser, eller at rammebetingelserne, på trods af at de er forskellige, ikke har nogen indflydelse på omkostningsniveauet. Estimeres en omkostningsfunktion uden rammebetingelser, hvor rammebetingelserne *har* en effekt på omkostningerne, vil effekten af dem i stedet findes i fejllid.

En omkostningsfunktion med rammebetingelser indeholder fire forskellige typer variable: Omkostninger ( $c$ ), outputmængder ( $y$ ), inputpriser ( $w$ ) og rammebetingelser ( $z$ ). Variablene, som vi anvender i SFA-modellen, beskrives i Boks 2.2.

### Boks 2.2 Forsyningssekretariatets variable i SFA-modellen

Omkostningerne er defineret gennem FATO (Faktiske Totale Omkostninger), mens outputmængderne defineres som OPEX- og CAPEX-netvolumenmålene. Rammebetingelserne udgøres af de to variable alder og tæthed. Alder beregnes på baggrund af selskabernes indberettede aktiver, hvori alderen på aktiverne indgår. Tæthed beregnes gennem antallet af postadresser i forsyningsområdet over længden på ledningsnettet. Der kan læses mere om modellens variable i Forsyningssekretariatets benchmarkingmodelrapport.

Inputpriserne i datasættet varierer ikke på tværs af selskaberne, idet de fastsættes gennem hhv. costdrivere i OPEX-netvolumenmålet og standardpriser på investeringer i CAPEX-netvolumenmålet. Det betyder, at Forsyningssekretariatet antager, at *law-of-one-price* holder, hvilket medfører, at  $w_i$  udgår af omkostningsfunktionen. Derved fremgår kun outputmængder og rammebetingelser eksplicit som forklarende variable.

## 2.2 Efficiensmål i SFA-modeller

Baseret på SFA-modellen kan den selskabsspecifik efficiens estimeres. Det betyder, at hvert selskab får en individuel efficiensscore på mellem nul og ét. En score på 0,85 betyder, at selskabet er 85 pct. efficient, hvilket samtidigt betyder, at det er 15 pct. inefficent.<sup>10</sup>

I SFA-modeller, som estimeres fra omkostningsfunktioner, udtrykker de estimerede efficiensscorer såkaldt omkostningsefficiens (*Cost Efficiency*, CE). Det udtrykker, hvor meget et selskab kan reducere sine omkostninger i forhold til deres faktiske omkostningsniveau ved uændret produktion for at være omkostningseffektivt. Er CE eksempelvis 0,9, betyder det, at omkostningerne kan reduceres med 10 pct. ved opretholdelse af samme produktion. CE-målet defineres jf. Bogetoft og Otto (2011) som

$$CE = \frac{wx^*}{wx}, \quad 0 \leq CE \leq 1 \quad (5)$$

hvor  $w$  er en vektor af inputpriser,  $x^*$  er de omkostningsminimerende inputmængder og  $x$  er de faktisk inputmængder.

For at være omkostningseffektiv skal to betingelser være opfyldt. Et selskab skal *både* vælge det rette, omkostningsminimerende miks af inputs (allokativ efficiens) og bruge dem teknisk effektivt (teknisk efficiens).

Teknisk efficiens (TE) måler efficiensen i omdannelsen af input til output og er defineret ved de faktiske inputmængder målt i forhold til de optimale inputmængder.<sup>11</sup> TE relateret til omkostningsfunktioner beskriver, hvor meget et selskab kan reducere sit forbrug af input ved uændret produktionsoutput (uden at foretage ændringer af den relative fordeling af input). En TE-score på 0,9 betyder eksempelvis, at alle inputmængder kan reduceres samtidigt med 10 pct. Hvis et selskab er teknisk efficient ( $TE = 1$ ), er det ikke nødvendigvis omkostningsminimerende. Der kan være en anden kombination af inputmængder, som muliggør at opretholde produktionen, men for færre omkostninger. Hvorvidt kombinationen af input er omkostningsminimerende defineres gennem allokativ efficiens (AE).

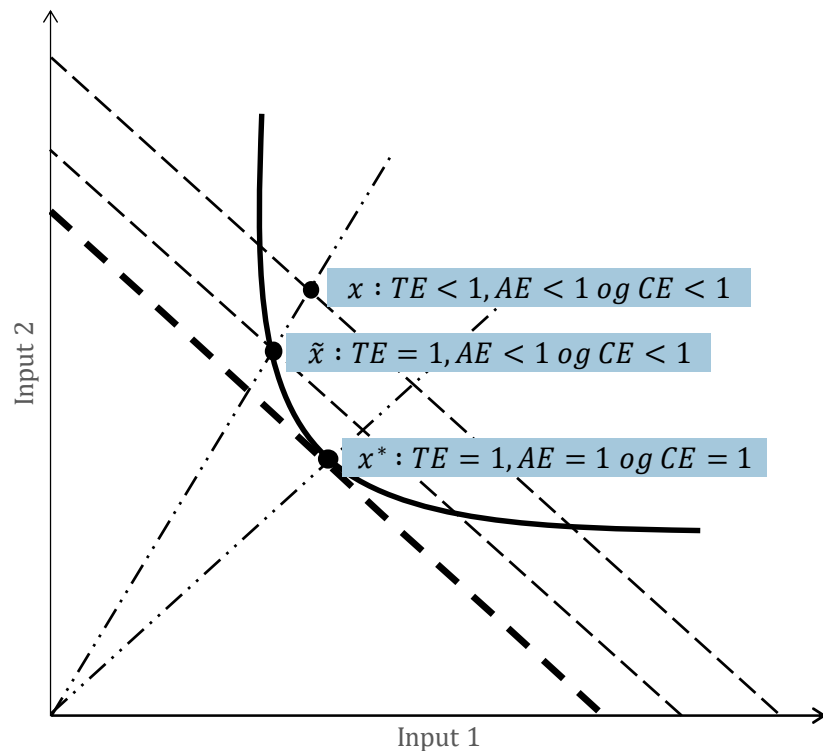
Teknisk-, allokativ-, og omkostningsefficiens er illustreret i Figur 2.2. Som eksempel betragtes et selskab med inputkombination  $x$ . Selskabet producerer i dette eksempel et output, der svarer til outputet angivet ved den fuldt optrukne linje (isokvanten). Med inputkombinationen  $x$  er selskabet hverken teknisk, allokativt eller omkostningsefficient. En proportional forskydning nedad langs linjen fra (0,0) gennem punktet  $x$  forbedrer selskabets tekniske efficiens. I punktet  $\tilde{x}$  er selskabet teknisk efficient, men stadig ikke allokativt efficient. Det betyder, at i punktet  $\tilde{x}$  er selskabets inputmængder lavest muligt, men at forholdet mellem dem ikke er optimalt: Selskabet anvender for høj en andel af input 2 frem for input 1. Ved at ændre inputkombinationen langs den fuldt optrukne linje i retning af punktet  $x^*$ , vil selskabet blive mere allokativt efficient. Ved inputkombinationen  $x^*$  er selskabet både teknisk og allokativt efficient

<sup>10</sup> Efficiens kan beregnes fra to metoder, Farrell's- eller Shephard's efficiensmål. Farrell's- og Shephard's mål er inverse af hinanden. Det betyder, at valget mellem de to mål ikke er centralt. Idet Forsyningssekretariatet bruger Farrell's mål, gennemgås Shephard's mål ikke her. Alle efficiensmål i dette kapitel refererer derfor til Farrell's mål. Information om Shephard's mål kan bl.a. findes i Bogetoft og Otto (2011).

<sup>11</sup> Teknisk efficiens kan defineres på to måder: fra et outputperspektiv og fra et inputperspektiv. Outputperspektivet, kaldet det output-orienterede efficiensmål, beskriver hvor meget output der produceres i forhold til det *maksimalt* mulige output afhængigt af selskabets inputs. Inputperspektivet, kaldet det input-orienterede efficiensmål, beskriver hvor lidt input der bruges til at opretholde sit produktionsniveau i forhold til det *mindst* mulige input ved at reducere alle inputmængder proportionalt. Når omkostningsefficiens opdeles mellem teknisk og allokativ efficiens, skal teknisk efficiens måles som inputorienteret teknisk efficiens. Derfor fokuseres på det inputorienterede efficiensmål i dette dokumentationsnotat.

og derfor også omkostningsefficient. Dette kan ses ud fra, at det er den lavest beliggende af de tre isokostkurver (de parallelle stiplede linjer).

Figur 2.2 Forholdet mellem teknisk, allokativ og omkostningsefficiens



**Anm.:** Den kraftige stiplede linje er den lavest mulige isokostkurve ved et produktionsniveau, de parallelle stiplede linjer er højere beliggende isokostkurver, dvs. inputkombinationer med højere omkostninger. Den fuldt optrukne linje er isokvanten. Isokvanten angiver forskellige kombinationer af de to input, som fører til samme output. De to linjer med udgangspunkt i punktet (0,0) angiver inputkombinationer, som har samme ratio mellem de forskellige inputs, men hvor mængderne af inputs stiger ved en bevægelse udad.  $x$  er en inputkombination som hverken er teknisk, allokativt eller omkostningsefficient,  $\tilde{x}$  er teknisk efficient, men ikke allokativt eller omkostningsefficient og  $x^*$  er både teknisk, allokativt og omkostningsefficient.

Kilde: Egen illustration

De efficiensscorer, som estimeres i vores SFA-model er CE og beskriver, hvor meget vandselskaberne kan reducere deres *omkostninger* og samtidig opretholde deres nuværende produktionsniveau. Det betyder, at vandselskaberne kan forbedre deres benchmarkingresultat gennem to mekanismer: Ved at anvende færre inputmængder i produktionen (forbedre TE) eller ved at ændre forholdet mellem de input, de anvender (forbedre AE).

### 2.3 Omkostningsfunktionens form og dennes betydning i SFA-modellen

Det er en forudsætning for at kunne estimere en omkostningsfunktion, at der gøres antagelser om, hvordan de afhængige variable påvirker omkostningerne. Da omkostningsfunktionsformen afhænger af produktionsfunktionsformen, starter analysen med at fastlægge antagelser om produktionsfunktionsformen. I den videnskabelige litteratur anvendes mange forskellige funktionsformer. Nogle af dem egner sig til specifikke sektorer eller problemstillinger, mens

andre er mere udbredte og generelt anvendelige. I dette afsnit gennemgås fordele og ulemper ved to funktionsformer: Cobb-Douglas og translog.<sup>12</sup>

### Cobb-Douglas-funktionsformen

Cobb-Douglas-funktionsformen er simpel og finder bred anvendelse – også i eksempler i mikroøkonomiske lærebøger. Idet formen kun har få parametre, som skal estimeres, er den velegnet til små datasæt. Derudover er formens estimationskoefficienter lette at fortolke, da effekten af hver variabel kun afspejles af en koefficient.

Der knytter sig en række antagelser til estimation af omkostningsfunktioner, som skal være opfyldt for at sikre et teoretisk fundament for SFA-modellen.<sup>13</sup> En vigtig antagelse er, at omkostningerne ikke må falde, hvis en eller flere outputmængder øges.<sup>14</sup> Dette kaldes monotonicitetsantagelsen. Hvis denne antagelse er brudt i vandsektoren vil det sige, at modellen forudsiger, at selskabernes estimerede omkostninger falder, hvis outputtet (OPEX- og/eller CAPEX-netvolumenmålet) øges. Monotonicitet er forklaret nærmere i Boks 2.3. Cobb-Douglas-funktionsformen opfylder ofte denne antagelse.<sup>15</sup>

Cobb-Douglas-funktionsformen for multi-output produktionsfunktionen har fire overordnede ulemper. *For det første* er den restriktiv i forhold til antagelsen omkring produktionsteknologien. En Cobb-Douglas-omkostningsfunktion har fx altid det samme skalaafkast uanset størrelsen på produktionen. Skalaafkast i omkostningsfunktioner refererer specifikt til den effekt en stigning i de minimale omkostninger har på outputmængderne.<sup>16</sup> *For det andet* kan en Cobb-Douglas-funktionsform ikke anvendes, hvis en eller flere outputmængder er nul. *For det tredje* er Cobb-Douglas-formen forholdsvis ufleksibel i forhold til at beskrive data, hvis data skulle afvige fra et log-lineært forhold med omkostningerne. *For det fjerde* har Cobb-Douglas-formen altid konvekse transformationskurver, hvor de burde være konkave.<sup>17</sup>

### Translog-funktionsformen

Translog-funktionsformen er hyppigt anvendt i videnskabelig litteratur. En translog-omkostningsfunktion er givet ved (Henningsen, 2019)

<sup>12</sup> Der er undersøgt andre funktionsformer i forbindelse med udviklingen af Forsyningssekretariatets SFA-model. Disse gennemgås i Appendiks 1. Yderligere information om produktionsfunktioner fremgår af Henningsen (2019).

<sup>13</sup> Det er vigtigt, at den empiriske model, der estimeres er teoretisk konsistent. Det betyder, at dens resultater er i overensstemmelse med de teoretiske egenskaber, der skal gælde ved fx produktions- og omkostningsfunktioner. Disse egenskaber dækker bl.a. over monotonicitet, konkaviteten af transformationskurverne, egenpriselasticiteter etc. I det følgende fokuseres specifikt på monotonicitetsantagelsen, fordi SFA-modellen anvendes til at fastsætte efficiensscore, og hvis antagelsen er brudt kan et selskab få en lavere efficiensscore ved at øge sit output. Det er ikke alle de teoretiske egenskaber, der er lige vigtige i forhold til fastsættelse af efficiensscore.

<sup>14</sup> Øvrige antagelser til omkostningsfunktionerne kan ses i Chambers (1988).

<sup>15</sup> I tilfælde, hvor monotonicitetsantagelsen er brudt under en Cobb-Douglas-form, er antagelsen brudt for samtlige observationer.

<sup>16</sup> Skalaafkastet i omkostningsfunktioner kaldes størrelsesafkastet, og beskriver hvor meget outputtet stiger ved en stigning i selskabets minimale omkostninger. Skalaafkast estimeres ud fra produktionsfunktionen og beskriver, hvor meget outputmængderne stiger ved en stigning i alle inputs. Generelt indikerer skala- og størrelsesafkastet det samme, hvilket konkret betyder, at hvis der er stigende skalaafkast, skal der også være stigende størrelsesafkast og omvendt. For nogle typer af funktionsformer (herunder Cobb-Douglas) er skala- og størrelsesafkast identisk.

<sup>17</sup> En transformationskurve angiver forholdet mellem output i en multi-output omkostningsfunktion. For en omkostningsfunktion med to output angiver den hvor mange færre enheder der skal produceres af output 1, for at producere én enhed mere af output 2. En konvex transformationskurve medfører – i teorien – at et selskab kan reducere mængden af et output til at være tæt på nul og samtidigt øge det andet output mod uendelig, uden at øge inputmængderne. Da der er forholdsvis stor ensartethed mellem selskabernes OPEX/CAPEX-forhold og da selskaberne kun i mindre grad kan påvirke dette forhold, formodes konsekvenserne ved denne ulempe at være begrænsede.

$$\begin{aligned} \log(c(w, y)) = & \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \log(w_i) + \sum_{i=1}^m \beta_i \log(y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \log(w_i) \log(w_j) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \log(y_i) \log(y_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \psi_{ij} \log(w_i) \log(y_j) + v + u. \end{aligned} \quad (6)$$

Translog-formen ligner Cobb-Douglas-formen, men indeholder udvidelser gennem interaktionsled mellem variablene i modellen.<sup>18</sup> Det giver translog-formen større fleksibilitet til at tilpasse sig data, hvilket ofte er en fordel, da den bedre vil kunne modellere forholdet mellem den afhængige variabel og de forklarende variable. Derudover er den mindre restriktiv i forhold til produktionsteknologien, fx ved at den ikke antager noget eksplicit om skalaafkastet.<sup>19</sup>

Translog-funktionsformen for multi-output produktionsfunktionen har dog fem vigtige udfordringer, når den bruges i praksis. Hver udfordring kræver konkrete vurderinger for at afgøre, om funktionsformen kan anvendes. *For det første* fører relativt få variable (outputmængder og inputpriser) til et stort antal parametre, som skal estimeres. Derfor begrænses brugen af translog-formen af datasættets størrelse. *For det andet* kan translog – ligesom Cobb-Douglas-formen – ikke håndtere observationer hvor én eller flere outputmængder er nul. *For det tredje* bryder translog-formen i empirisk kontekst ofte monotonicitetsantagelsen for en eller flere observationer. Hvis monotonicitetsantagelsen ikke er opfyldt for alle observationer, kan modellen tilpasses, så antagelsen opfyldes. Det kan fx gøres med metoden foreslået i Henningsen og Henning (2009), som er beskrevet i Boks 2.3. *For det fjerde* er der ofte multikollinearitet i modellen, når translog-formen estimeres. Multikollinearitet betyder, at flere af de forklarende variable er højt korrelerede. Det gør, at modellen har svært ved at skille de forskellige variables effekt fra hinanden. Et af de typiske symptomer på multikollinearitet er insignifikante parameterestimer. Er parametrene ikke signifikante, er det ikke det samme som at de ikke har en effekt. Dette kan testes statistisk ved brug af fx en Wald-test. Dette gælder både ved estimering med OLS og SFA. *For det femte* har translog-formen meget ofte konvekse transformationskurver, hvor de burde være konkave.

### Boks 2.3 Monotonicitet i omkostningsfunktioner

Monotonicitetsantagelsen er central i det empiriske arbejde med omkostningsfunktioner, når disse anvendes til at estimere efficiens.

Monotonicitet i forbindelse med omkostningsfunktioner referer til to ting: monotonicitet i inputpriser og monotonicitet i outputmængder. Formelt er de defineret som (Chambers, 1998)

- **Monotonicitet i inputpriser:** Omkostningerne er ikke-faldende i inputpriser; hvis  $w' \geq w$  så  $c(w', y) \geq c(w, y)$
- **Monotonicitet i outputmængder:** Omkostningerne er ikke-faldende i outputmængderne; hvis  $y \geq y'$  så  $c(w, y) \geq c(w, y')$

Monotonicitet i inputpriserne medfører, at en stigning i prisen på et input aldrig kan reducere det minimale omkostningsniveau. Monotonicitet i outputmængderne medfører, at en større mængde i et output ikke fører til lavere omkostninger. Denne antagelse bør altid undersøges, når man arbejder med omkostningsfunktioner, uanset om det er translog eller Cobb-Douglas, eller om der anvendes OLS, SFA eller en anden estimator.

<sup>18</sup> Translog-produktionsfunktionen fremkommer fra en Taylor ekspansion af en CES-produktionsfunktion, hvor CES står for *constant elasticity of substitution*. Cobb-Douglas produktionsfunktionen er desuden et specialtilfælde af CES-produktionsfunktionen.

<sup>19</sup> I Cobb-Douglas formen afhænger størrelsesafkastet udelukkende af parameterværdierne og er derfor konstant for alle størrelser af produktionen. Dette er ikke tilfældet ved brug af en translog-funktion.

Det kan beregnes, om antagelserne er opfyldt for de individuelle selskaber i regressionen. En translog-funktion vil ofte have en eller flere observationer, som bryder med antagelsen om monotonicitet. Det betyder ikke nødvendigvis, at translog-formen ikke egner sig til at estimere omkostningsfunktionen. Det er dog vigtigt, at tage højde for dette ved at tilpasse modellen, så monotonicitet er opfyldt.

Beregningen af hvorvidt monotonicitet er opfyldt, sker ved at beregne den marginale ændring i omkostningerne ved en stigning i inputpriserne eller outputmængderne, dvs. den første ordens afledte:

$$\frac{\partial c(w, y)}{\partial w_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (b.2.1)$$

$$\frac{\partial c(w, y)}{\partial y_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (b.2.2)$$

For en Cobb-Douglas funktion er de to monotonicitetsantagelser opfyldt, hvis hhv.  $\alpha_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$  og  $\beta_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m$ . Opfyldes det, er monotonicitet opfyldt globalt, dvs. for alle observationer.

For en translog omkostningsfunktion afhænger niveauet af mere end blot parameterværdierne:

$$\frac{\partial c(w, y)}{\partial w_i} = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \log(w_j) + \sum_{j=1}^m \psi_{ij} \log(y_j) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (b.2.3)$$

$$\frac{\partial c(w, y)}{\partial y_i} = \beta_i + \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \log(y_j) + \sum_{j=1}^n \psi_{ji} \log(w_j) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (b.2.4)$$

Det betyder, at monotonicitetsantagelsen kan være brudt for enkelte selskaber, afhængig af selskabets specifikke værdier af  $w_j$  og  $y_j$ . I Forsyningssekretariatets SFA-model er monotonicitet kun relevant i forhold til output, da inputpriserne antages at være konstante på tværs af selskaberne.

Formlerne (b.2.3) og (b.2.4) beregnes for hver observation for alle inputpriser og outputmængder. Er antagelsen brudt for et selskab for én variabel, er monotonicitetsantagelsen brudt for den pågældende observation, og modellen bør tilpasses.

En metode til at sikre, at monotonicitetsantagelsen er overholdt for samtlige observationer er baseret på Henningsen og Henning (2009). Her sker en tilpasning af SFA-modellens koefficienter i tre trin, så de overholder monotonicitet.

1. **Estimation af almindelig SFA-model under en translog-omkostningsfunktion:** Herfra opnås estimater af translog-koefficienterne og det er muligt at beregne de estimerede koefficienters varians-kovarians-matrix. I dette trin undersøges det desuden, om monotonicitetsantagelsen er overholdt for samtlige selskaber.
2. **Identificér koefficienter, der opfylder monotonicitetsantagelsen for alle observationer, og er så tæt på de oprindelige koefficienter som muligt:** Der identificeres nye værdier for translog-koefficienterne, som opfylder monotonicitet ved alle observerede outputmængder, og som er så tæt på de oprindelige koefficienter (fra trin 1) som muligt. Hvis inputpriser varierer på tværs af selskaberne, skal koefficienterne for disse også tilpasses til at overholde monotonicitetsantagelsen. Dette er dog ikke tilfældes i Forsyningssekretariatets SFA-model, hvor selskaberne antages at have ens inputpriser, jf. Boks 2.2. Afstanden mellem de oprindelige koefficienter (trin 1) og de nye koefficienter (trin 2) måles relativt standardfejlen på de originale koefficienter. Det betyder, at en given afstand mellem den originale værdi og den nye værdi af en koefficient har større betydning, hvis det originale estimat af koefficienten har en lille standardfejl i forhold til hvis det har en høj standardfejl.
3. **Estimér efficiensscorerne for selskaberne baseret på koefficienterne, der opfylder monotonicitet:** En ny translog SFA-model estimeres, hvor de fittede værdier, der

opnås på baggrund af koefficienterne i trin 2, indgår som forklarende variabel. I dette trin kan der desuden tillades, at koefficienterne fra trin 2 justeres. Dette trin er vigtigt, idet estimationen fra trin 1 kan resultere i, at SFA-modellens koefficienter er systematisk fejlestimerede, som følge af brud på monotonicitetsantagelsen. Hvis dette er tilfældet, vil det afspejle sig i koefficienterne i trin 2. Dette korrigeres i trin 3.

### **Cobb-Douglas eller translog?**

Hvorvidt translog eller Cobb-Douglas skal anvendes til estimation af efficiensscorer afhænger dels af de teoretiske egenskaber ved de to modeller, dels af de empiriske egenskaber. I det følgende sammenlignes de to funktionsformers teoretiske og empiriske egenskaber for at vurdere deres anvendelighed for den danske vandsektor.

I forhold til de *teoretiske egenskaber* minder de to former i mange tilfælde om hinanden. Ingen af formerne kan håndtere nul-observationer i outputmængder, fx hvis et selskabs CAPEX-netvolumenmål er nul. Monotonicitetsantagelsen er ofte opfyldt ved Cobb-Douglas-funktionsformen, mens den ofte ikke er opfyldt for samtlige selskaber i translog-formen.<sup>20</sup> Bruges translog-formen til benchmarking, vil der derfor ofte være et behov for en tilpasning af modellen, så monotonicitet er overholdt. Tilpasses modellen, er translog-formen velegnet til benchmarking, da dens fleksibilitet ofte vil være en fordel.

De to funktionsformer adskiller sig ved antagelsen om produktionsteknologien. Cobb-Douglas antager bl.a., at skalaafkastet ikke afhænger af produktionens størrelse, men derimod er det samme for alle selskaber på tværs af størrelser. Translog kan derimod føre til, at størrelsesafkastet afhænger af produktionens størrelse. Det betyder fx, at selskaberne kan have forskellige fordele af at blive større alt efter, hvor store de allerede er eller hvilken kombination af outputs de producerer.

De *empiriske egenskaber* ved de to modeller adskiller sig fra hinanden. Især i forhold til hvor mange parametre der er i modellen og modellens tilpasningsevne.

Antallet af parametre er afgørende i de situationer, hvor et datasæt har relativt få observationer. Parameterantallet bestemmes ud fra hvor mange forskellige variable der skal estimeres. Hvis der er mange parametre i forhold til antallet af observationer – i vandsektoren er antal observationer lig antallet af selskaber, der benchmarkes – vil modellen have svært ved at adskille de forskellige effekter fra hinanden. Hvis der omvendt er relativt få observationer i forholdt til antal parametre, vil modellen ikke kunne estimeres meningsfyldt. Estimeres en model på baggrund af et lille datasæt, vil en Cobb-Douglas-funktion derfor være at foretrække, da den har et mere begrænset antal parametre sammenlignet med translog.

Er et tilstrækkeligt antal observationer tilgængeligt, kan translog med fordel anvendes. Det skyldes primært en anden empirisk egenskab – tilpasningsevnen. Translog kan i højere grad tilpasses data, da den har en række interaktionsled. Gennem interaktionsleddene opnås en større fleksibilitet, hvilket ofte vil give den en bedre evne til at tilpasse sig data.

---

<sup>20</sup> Hvis monotonicitetsantagelsen ikke er opfyldt under Cobb-Douglas-funktionsformen, er den dog brudt for samtlige selskaber.

Både Cobb-Douglas og translog muliggør at kontrollere for rammebetingelser direkte i estimationen af omkostningsfunktionen. Rammebetingelser kan både indgå med og uden interaktion med inputpriser og outputmængder.

#### 2.4 Identifikation og håndtering af observationer med stor indflydelse på estimaterne

I arbejdet med regressionsanalyser vil nogle observationer påvirke parameterestimerne i modellen i højere grad end andre. Det betyder, at nogle observationer har større indflydelse på analyseresultaterne end andre. En høj indflydelse er i sig selv hverken positivt eller negativt i forhold til modellens evne til at beskrive virkeligheden. En observation, der har stor indflydelse på estimaterne, kan lige så vel påvirke modellen, så modellen bedre beskriver virkeligheden, som den kan påvirke modellen til dårligere at beskrive virkeligheden. Det er dog stadig relevant at have kendskab til hvilke observationer, der har en stor indflydelse på resultaterne. Vurdering af indflydelsesrige observationer bidrager til at øge troværdigheden af modellens resultater.

Et konkret mål til at identificere graden af indflydelse, som hver observation har i en OLS-model, er ved Cook's Distance.<sup>21</sup> Cook's Distance beregnes ved at estimere en OLS-model med samtlige observationer i datasættet. Herefter fjernes én observation ad gangen, og modellen genestimeres for hver gang. Hver estimation, hvor et selskab er ekskluderet fra regressionen, evalueres i forhold til modellen med alle observationer. Evalueringen foretages på baggrund af ændringer i den afhængige variabel, og herfra beregnes Cook's Distance:

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \hat{y}_{j(i)})^2}{k\hat{\sigma}^2}, \quad (7)$$

hvor  $D_i$  er Cook' Distance værdien for selskab  $i$ ,  $\hat{y}_j$  er den fittede værdi af den afhængige variabel for selskab  $j$ , når alle selskaber inkluderes i regressionen,  $\hat{y}_{j(i)}$  er den fittede værdi for selskab  $j$  uden det  $i$ 'ende selskab i regressionen,  $k$  er antallet af forklarende variable i modellen inklusiv interceptet, og  $\hat{\sigma}^2$  er variansen i modellen med alle selskaber.

Der findes ingen faste grænseværdier til at evaluere, hvornår en Cook's Distance værdi er høj. Der anvendes forskellige skæringer i litteraturen, herunder 0,5, 1,  $4/n$  (hvor  $n$  er antallet af observationer) etc.

Cook's Distance er ikke udviklet til identifikation af indflydelsesrige observationer i SFA-modeller. Til at evaluere graden af indflydelse en observation i en SFA-model kan Pseudo-Cook's Distance anvendes.<sup>22</sup> Pseudo-Cook's Distance beregnes overordnet set efter samme tilgang som Cook's Distance. Forskellen ligger i, at Pseudo-Cook's Distance tager højde for, at fejlløbet er sammensat af stokastisk støj og inefficiens. I en SFA-model er det dog ikke altid de forudsagte værdier, som er relevante at evaluere på. Det er ofte mere relevant at evaluere på, om en observation har stor indflydelse på de estimerede efficiensscorer. Pseudo-Cook's Distance kan derfor estimere hver observations indflydelse på enten de forudsagte værdier eller efficiensscorerne. Pseudo-Cook's Distance, der evaluerer på indflydelsen på efficiensscorerne, er defineret ved

<sup>21</sup> Cook's Distance er udviklet af Ralph Cook i 1977.

<sup>22</sup> Arne Henningsen fra Københavns Universitet har på foranledning af Forsyningssekretariatet udviklet Pseudo-Cook's Distance og implementeret metoden i R-pakken "frontier", som ofte anvendes til at estimere SFA-modeller. Der kan læses mere om Pseudo Cook's Distance i baggrundsnotatet *Influential Observations in Stochastic Frontier Analysis*, som findes på vores hjemmeside under baggrundsmetoderne [her](#).



$$D_i^{eff} = \frac{\sum_{j=1}^n (\widehat{eff}_j - \widehat{eff}_{j(i)})^2}{k \widehat{\sigma}_{eff}^2}, \quad (8)$$

hvor  $D_i^{eff}$  er Pseudo-Cook's Distance-scoren for selskab  $i$ ,  $\widehat{eff}_j$  er efficiensscoren for selskab  $j$ , når alle selskaber er med i regressionen,  $\widehat{eff}_{j(i)}$  er efficiensscoren for selskab  $j$  uden selskab  $i$ ,  $k$  er antallet af parametre inklusiv interceptet og  $\widehat{\sigma}_{eff}^2$  er variansen af efficiensscorene. Ligesom for Cook's Distance findes der ingen faste grænseværdier til at evaluere, om en Pseudo-Cook's Distance-værdi er høj. Derfor evalueres den som udgangspunkt ud fra samme værdier som den originale Cook's Distance.

For både Cook's Distance og Pseudo-Cook's Distance gælder, at en høj værdi hverken betyder noget positivt eller negativt for analyseresultaterne ved inkludering af observationen med stor indflydelse. Det betyder selvsagt, at en observation ikke skal ekskluderes fra analysen, blot fordi den identificeres til at have stor indflydelse på efficiensscorene. Identificeres en observation til at have stor indflydelse, skal den i første omgang undersøges for eventuelle datafejl og eventuel forskelligartethed fra de øvrige selskaber, der ikke allerede er taget højde for i selve SFA-modellen eller igennem datakorrektioner. Hvis der findes en forskelligartethed i en sådan grad, at selskabet ikke vurderes at kunne sammenlignes med de øvrige selskaber, og denne forskelligartethed ikke kan håndteres i SFA-modellen eller via datakorrektioner, kan observationen ekskluderes. I det tilfælde kan SFA-modellen ikke anvendes til at fastsætte en efficiensscore for dette selskab, da selskabet ikke er sammenligneligt med de øvrige selskaber.

## 2.5 Låsning af en SFA-model

Der kan være behov for at "låse" SFA-modellen, så der kan genberegnes efficiensscore for en del af de selskaber, som analyseres, uden at efficiensscorene påvirkes for samtlige selskaber. Det kan fx være nødvendigt, hvis der sker ændringer i data fra et vandselskab, som bevirker, at benchmarkingen skal genberegnes efter den endelige benchmarkingmodel er fastlagt.<sup>23</sup> Ændringerne i data kan eksempelvis ske, fordi der foreligger ændrede oplysninger som følge af selskabets hørings svar til udkast om økonomiske rammer for det kommende år. Låsningen af SFA-modellen foretages derfor blandt andet som et hensyn til vandselskaberne, så der er en højere grad af sikkerhed omkring de økonomiske rammer, der præsenteres i høringen.

Når en SFA-model låses, sker det i tre trin:

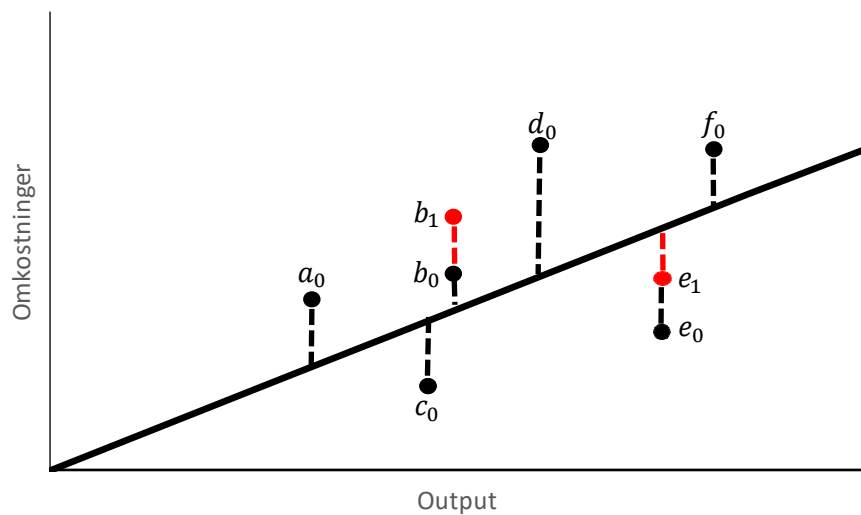
1. En omkostningsfunktion estimeres på baggrund af det oprindelige data, hvorved residualer ( $v + u$ ) fremkommer for alle selskaber. Parametrene fra denne estimation gemmes. Dette er den SFA-model, som efficiensscorene, der sendes i høring, baseres på.
2. Data ændres for et eller flere selskaber. Det kan fx skyldes et hørings svar som giver anledning til, at et selskab får ændret deres data.
3. Residualerne ( $v + u$ ) beregnes for det nye datasæt i forhold til den oprindelige omkostningsfunktion – det vil sige baseret på de parametre, der estimeres i den oprindelige SFA-model (trin 1). Selskaber, som har uændret data, vil have samme residualer ( $v + u$ ), og derved også samme efficiensscore som før. Selskaber, som har fået ændret data, vil have et nyt residual, som fører til en ny efficiensscore.

<sup>23</sup> Den endelige benchmarkingmodel skal være fastlagt senest d. 15. september hvert år, jf. Bekendtgørelse om økonomiske rammer for vandselskabers (ØR-bekendtgørelsen BEK nr. 296 af 27/03/2020) § 7, stk. 2.

Ved "låsning" af modellen anvendes de estimerede koefficienter fra den oprindelige benchmarkingmodel, selvom data ændrer sig. Hvis data ændres for et selskab, er det alene afstanden (residualet) mellem selskabet og funktionen som ændres, hvilket ændrer efficiensscoren for selskabet men ikke for de øvrige selskaber.

Der beregnes således nye efficiensscore for de selskaber, hvis data har ændret sig, baseret på de oprindelige resultater, som vist i Figur 2.3. I eksemplet i figuren ændres data for selskab b og e, mens data er uændret for de øvrige selskaber. Da koefficienterne i regressionen ikke ændres, er den estimerede omkostningsfunktion uændret, hvorfor residualet og dermed efficiensscorene, forbliver uændrede for selskaber, der ikke har ændrede data.

Figur 2.3 Når en SFA-model låses vil efterfølgende dataændringer kun påvirke selskabet, hvis data ændres



**Anm.:** Figuren er illustrativ og viser en SFA-model med kun et output. Den sorte linje er omkostningsfunktionen (som for eksemplets skyld antages at være lineær), sorte punkter er oprindelig data, og røde punkter er ændret data, men som holdes op imod den oprindelige omkostningsfunktion. I figuren er det kun selskabets omkostninger, der er ændret, men der kan på samme måde forekomme ændringer af selskabernes output.

Kilde: Egen illustration

## Kapitel 3

# Ændringer i Forsyningssekretariatets SFA-model

Førrige kapitel gennemgik de vigtigste teoretiske og empiriske egenskaber ved fastsættelse af efficiensscorer med en SFA-model. Dette kapitel beskriver tre ændringer foretaget til Forsyningssekretariatets SFA-model i 2020 og tager – for eksemplets skyld – udgangspunkt i det seneste data indberettet af drikkevandsselskaberne; (1) introduktion af rammebetingelserne (alder og tæthed) direkte i SFA-modellen, (2) ændring af funktionsformen, inklusiv sikring af monotonicitet i translog-modellen og (3) brug af Pseudo-Cook's Distance på efficiensscorer. Til benchmarking af drikkevandsselskaber i 2020 anvendes et gennemsnit af selskabernes indberettede data for 2018 og 2019. Data for begge år er indberettet i 2020.<sup>24</sup>

### 3.1 SFA-modellen kontrollerer direkte for rammebetingelser

Vi kontrollerer direkte for rammebetingelserne alder og tæthed i SFA-modellen. Det betyder, at rammebetingelserne inkluderes i SFA-modellen som forklarende variable

$$\log(FATO_i) = c(OPEX_i, CAPEX_i) + \delta_1 \text{alder}_i + \delta_2 \text{tæthed}_i + u_i + v_i. \quad (9)$$

Det er muligt at kontrollere direkte for rammebetingelser, da SFA-modellen er en regressionsanalyse, fremfor at rammebetingelserne indgår gennem de korrigerede netvolumenmål som i DEA-modellen.

Rammebetingelserne indgår log-lineært i modellen. Dette beror på en vurdering af, at alder og tæthed påvirker omkostningsniveauet, og at denne relative påvirkning ikke afhænger af outputmængderne eller rammebetingelserne mellem hinanden.<sup>25</sup> Hvis det fx havde været vurderet, at alder og tæthed havde forskellig relativ påvirkning på omkostningerne afhængig af et selskabs størrelse (målt ved niveauet af OPEX og CAPEX), kunne der introduceres krydsled mellem disse variable for at kontrollere for denne effekt.<sup>26</sup> Gevinsten ved at introducere krydsled for at øge modellens evne til at forklare data, skal holdes op i mod omkostningen ved at miste frihedsgrader i regressionen. Jo flere krydsled, der introduceres i modellen, des flere parametre skal modellen estimere på baggrund af datasættet. Datasættene, der ligger til grund for estimationen af efficiensscorer i vandsektoren, er forholdsvis små (omkring 75-100 observationer), hvilket fører til en begrænsning af, hvor mange forklarende variable, der kan introduceres.

Forsyningssekretariatet har tidligere kontrolleret for alder og tæthed ved at estimere tre SFA-modeller: (1) en SFA-model, der anvender OPEX og CAPEX som outputvariable, (2) en SFA-model, der anvender alderskorrigerede netvolumenmål for OPEX og CAPEX som outputvari-

<sup>24</sup> En nærmere beskrivelse af metoden for fastlæggelsen af effektiviseringskrav for drikkevandsselskaber kan findes [her](#).

<sup>25</sup> Da sammenhængen mellem omkostningerne og rammebetingelserne specificeres log-lineært estimeres den procentvise (relative) ændring i omkostningerne ved en absolut stigning i rammebetingelserne.

<sup>26</sup> Krydsled kunne fx være  $\log(OPEX_i) * \text{alder}_i$ ,  $\log(CAPEX_i) * \text{alder}_i$  eller  $\text{tæthed}_i * \text{alder}_i$ .

able og (3) en SFA-model, der anvender tæthedskorrigerede netvolumenmål for OPEX og CAPEX som outputvariable.<sup>27</sup> Under den tidligere praksis fastsatte vi efficiensscoren fra SFA-modellerne som den højeste score for hvert selskab fra de tre modeller.

### 3.2 Ændring af funktionsformen

Vi anvender en translog-funktionsform i estimationen af vandsektorens efficiensscorer. Inklusiv variablene, der beskriver rammebetingelserne alder og tæthed, estimeres vandsektorens efficiensscorer ud fra følgende regressionsligning

$$\begin{aligned} \log(FATO_i) = & \beta_0 + \beta_1 \log(OPEX_i) + \beta_2 \log(CAPEX_i) + \beta_{11} 0,5 \log(OPEX_i)^2 \\ & + \beta_{22} 0,5 \log(CAPEX_i)^2 + \beta_{12} \log(OPEX_i) \log(CAPEX_i) + \delta_1 \text{alder}_i \\ & + \delta_2 \text{tæthed}_i + v_i + u_i. \end{aligned} \quad (10)$$

SFA-modellen med en translog-funktionsform kontrollerer både for, at effekten fra OPEX og CAPEX kan variere på tværs af selskabernes størrelse, at effekten kan afhænge af interaktion mellem OPEX og CAPEX og at selskaberne har forskellige rammebetingelser.

Tidligere har vi anvendt en Cobb-Douglas-funktionsform, som fører til SFA-modellen

$$\begin{aligned} \log(FATO_i) = & \beta_0 + \beta_1 \log(OPEX_i) + \beta_2 \log(CAPEX_i) \\ & + \delta_1 \text{alder}_i + \delta_2 \text{tæthed}_i + v_i + u_i \end{aligned} \quad (11)$$

Denne specifikation af modellen kontrollerer for den direkte effekt af OPEX og CAPEX men tillader ikke, at effekten fra OPEX og CAPEX kan variere på tværs af selskabernes størrelse, eller at effekten kan afhænge af interaktion mellem OPEX og CAPEX. Det betyder også, at Cobb-Douglas-funktionsformen har færre parametre, der skal estimeres.

Det er muligt at teste SFA-modellerne med hhv. en Cobb-Douglas- og en translog-funktionsform mod hinanden ved brug af en likelihood-ratio test. Testen sammenligner forklaringsgraden af de to modeller og giver et statistisk mål for, hvor stor forskellen mellem disse er. For data indberettet af drikkevandsselskaberne i 2020 forkastes Cobb-Douglas funktionsformen til fordel for translog-funktionsformen på et 1 pct. signifikansniveau. Dette er en indikation af, at translog-funktionsformen er mere egnet end Cobb-Douglas-funktionsformen.<sup>28</sup>

Det er vigtigt, at antagelsen om monotonicitet er opfyldt, når estimation af omkostningsfunktionen anvendes til at beregne efficiensscorer (se diskussion i afsnit 2.3). Monotonicitetsantagelsen tilsiger, at et selskabs omkostninger ikke falder, når selskabets output stiger. Antagelsen er central i forbindelse med estimation af omkostningsfunktioner og den kan være brudt i den empiriske estimation af omkostningsfunktionen.

Fronten for otte selskaber i benchmarkingen af drikkevandsselskaberne i 2020 overholder ikke monotonicitetsantagelsen for enten OPEX, CAPEX eller begge. Derfor tilpasses SFA-modellens koefficienter, så monotonicitet er overholdt for alle selskaber. Tilpasningen af modellen foregår som beskrevet i Boks 2.3 i afsnit 2.3. Det vurderes, at denne tilpasning fører til en

<sup>27</sup> Der kan læses mere om alders- og tæthedskorrigerede netvolumenmål i Forsyningssekretariatets benchmarkingmodelpapir, som kan findes på Konkurrence- og Forbrugerstyrelsens hjemmeside.

<sup>28</sup> Det skal bemærkes, at det ikke er bevis på, at Cobb-Douglas-funktionsformen er korrekt (eller bedre), hvis likelihood-ratio testen ikke kan forkaste Cobb-Douglas-funktionsformen til fordel for translog-funktionsformen. Translog-funktionsformen kan stadig anvendes i sådanne tilfælde.

mere retvisende og teoretisk konsistent model. Dette bevirker bl.a., at efficiensscorerne også forventes at blive mere præcist estimeret.

Tilpasningen giver anledning til ændrede parameterestimater i translog-modellen, jf. Tabel 3.1.

Tabel 3.1 **Koefficienter fra den urestringerede og restringerede translog-model**

Variabel	Koefficienter fra den urestringerede translog-model	Koefficienter fra den restringerede translog-model
Skæring	5,7459	8,3573
Log(OPEX)	6,2202	2,7091
Log(CAPEX)	-5,7743	-2,5853
0,5*log(OPEX) <sup>2</sup>	-0,4795	-0,1649
0,5*log(CAPEX) <sup>2</sup>	0,2740	0,1706
Log(OPEX)*log(CAPEX)	0,1173	0,0223
Alder	-0,0084	-0,0126
Tæthed	2,6359	2,3672

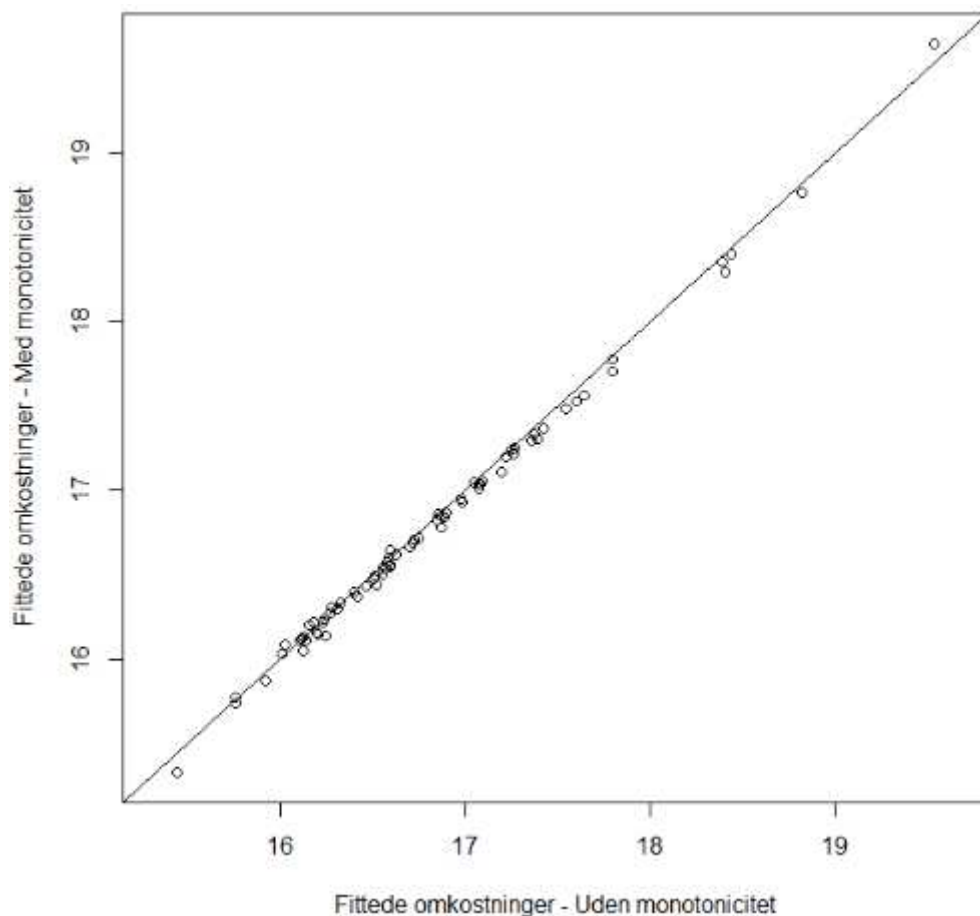
**Anm.:** Signifikansniveauer er ikke angivet i tabellen, da disse ikke fastsættes i den restringerede translogmodel. Koefficienterne er beregnet på baggrund af gennemsnitsdata for 2018 og 2019.

*Kilde: Forsyningssekretariatet på baggrund af data indberettet af vandselskaberne.*

For at undersøge konsekvenserne af tilpasningen af SFA-modellens koefficienter ses der på modellens evne til at forudsige den afhængige variabel (FATO) før og efter tilpasningen. Det vil sige, at tilpasningen *ikke* evalueres på baggrund af ændringerne af de enkelte koefficienter i SFA-modellen ved translog-funktionsformen, men derimod på modellens evne til at forudsige selskabernes samlede omkostninger. Det skyldes bl.a., at koefficienterne i en translog SFA-model ikke har en umiddelbar økonomisk fortolkning på grund af interaktionsleddene.

Modellerne bør have forudsagte (dvs. fittede) værdier, som ligger tæt på hinanden, hvilket er tilfældet for drikkevandsselskaberne på baggrund af data indberettet i 2020, jf. Figur 3.1. Det vurderes derfor, at den korrigerede SFA-modellen, som sikrer opfyldelse af monotonicitet, er mest retvisende, da den sikrer højere grad af teoretisk konsistens uden at påvirke modellens evne til at forudsige selskabernes samlede omkostninger i nævneværdig grad.

Figur 3.1 Translog-omkostningsfunktion med og uden monotonicitet sikret

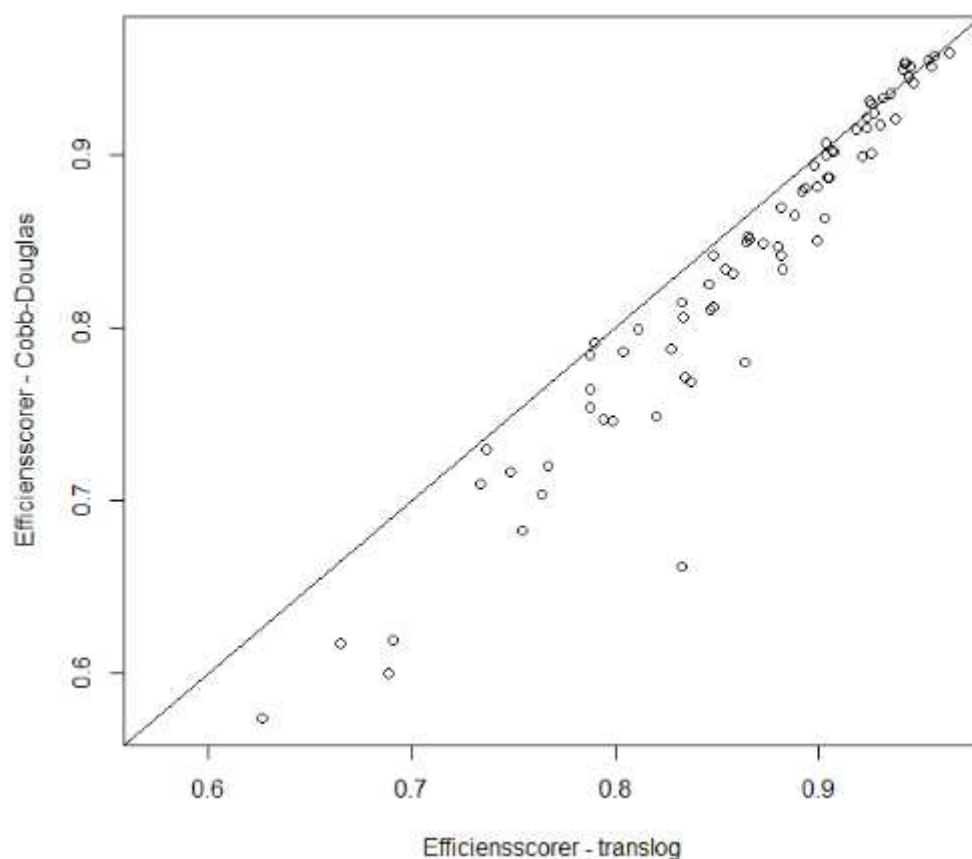


**Anm.:** x-aksen viser de fittede omkostninger ( $\log(\text{FATO})$ ) fra SFA-modellen med translog-funktionsform, hvor koefficienterne er tilpasset således at monotonicitetsantagelsen er sikret, mens y-aksen viser de fittede omkostninger ( $\log(\text{FATO})$ ) fra en SFA-model med translog-funktionsform uden at monotonicitet er sikret. 45-graders linjen indikerer, hvor de fittede værdier er ens med og uden tilpasning af SFA-modellens koefficienter. Der er anvendt data for gennemsnittet mellem 2018 og 2019.

*Kilde: Forsyningssekretariatet på baggrund af data indberettet af vandselskaberne.*

For benchmarking af drikkevandssektoren i 2020 fører anvendelsen af en restrikeret translog-omkostningsfunktion gennemsnitligt til højere efficiensscorer end Cobb-Douglas-omkostningsfunktionen, jf. Figur 3.2. Dette kan skyldes flere ting, herunder konkrete dataspecifikke forhold, der gør sig gældende for data indberettet i 2020, eller at translog er mere fleksibel end Cobb-Douglas funktionsformen, hvilket medfører en tilbøjelighed til, at der estimeres højere scorer. Det må derfor i nogen grad forventes, at forskellen mellem efficiensscorerne estimeret med en Cobb-Douglas-funktionsform og en translog-funktionsform er årsspecifikke og ikke nødvendigvis vil forekomme fremover.

Figur 3.2 Efficiensscorer ved Cobb-Douglas og restringeret translog



**Ann.:** x-aksen viser efficiensscorerne fra en restringeret translog-omkostningsfunktion, mens y-aksen viser efficiensscorerne fra Cobb-Douglas-omkostningsfunktionen. 45-graders linjen indikerer punktet, hvor translog- og Cobb-Douglas-omkostningsfunktionerne har ens efficiensscorer. Hvis et punkt ligger under 45-graders linjen estimerer den restringerede translog højere efficiensscore end ved Cobb-Douglas-funktionsformen. Der er anvendt data for gennemsnittet mellem 2018 og 2019.

*Kilde: Forsyningssekretariatet på baggrund af data indberettet af vandselskaberne.*

### 3.3 Pseudo-Cook's Distance og forskelligartethed blandt vandselskaberne

Som et centralt redskab til at identificere, om der er selskaber, som skal behandles som outliers i benchmarkingen anvender vi i Forsyningssekretariatet Pseudo-Cook's Distance til at estimere graden af hvert selskabs indflydelse på de estimerede efficiensscorer. Efficiensscorerne er det vigtigste resultat fra vores SFA-model, da disse kan have direkte indflydelse på selskabernes individuelle effektiviseringskrav og derfor på selskabernes økonomi.

Selskaber med høj grad af indflydelse på efficiensscorerne bliver vurderet individuelt for at sikre at selskabet er sammenligneligt med de øvrige selskaber. Vurderingen af sammenligneligheden af selskaber foretages efter, der bl.a. er foretaget datakorrektioner (bl.a. i forhold til særlige forhold og øvrige aktiver), og med det forbehold, at SFA-modellen kontrollerer for forskelle i størrelse, alderen på selskabets aktiver og den geografiske tæthed af selskabets kun-

---

der. Et selskab, der vurderes at have en for høj grad af forskelligartethed fra de andre selskaber, vil *udelukkende* kunne blive behandlet som outlier, hvis selskabet også har en høj grad af indflydelse på de estimerede efficiensscorer som målt ved Pseudo-Cook's Distance.<sup>29</sup>

For drikkevandselskaberne i 2020 har tre selskaber en Pseudo-Cook's Distance over 0,5. Det drejer sig om HOFOR Vand København A/S, NK-Vand A/S og TREFOR Vand A/S. Ingen af disse selskaber vurderes at være forskellige fra de øvrige selskaber i en grad, der tilsiger, at disse selskaber bør behandles specielt.

Tidligere har vi anvendt Cook's Distance i en OLS-model (med samme specifikation som SFA-modellen) til at analysere graden af indflydelse, som hvert selskab har i forhold til at påvirke de fittede værdier af outputvariablen ( $\log(FATO)$ ). Denne tilgang har to svagheder. *For det første* beregnes graden af indflydelse ikke på SFA-modellen men derimod på en OLS-model (som fungerer som en proxy for SFA-modellen i denne sammenhæng). *For det andet* identificerer metoden ikke en observations indflydelse på de estimerede efficiensscorer. Derfor anvender vi ikke denne metode ved benchmarking af drikkevandsselskaberne i 2020.

---

<sup>29</sup> Forskelligartetheden skal vurderes på forhold ud over størrelse, kombination af outputs, alder og tæthed, da SFA modellen tager højde for disse. Der kan også være øget usikkerhed omkring validiteten af data for et specifikt selskab. Dette påvirker i udgangspunktet ikke sammenligneligheden med de øvrige selskaber i en SFA-analyse. Det skyldes SFA-modellens egenskab til at håndtere usikkerhed gennem støjledet,  $v$ . Den øgede usikkerhed bliver altså håndteret gennem støjledet.

---



## Litteratur

Aigner, D., Lovell, C. K., & Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of econometrics*, 6(1), 21-37.

Bogetoft, P., & Otto, L. (2011). *Benchmarking with DEA, SFA, and R*. Springer.

Chambers, R. G. (1988). *Applied production analysis: a dual approach*. Cambridge University Press.

Henningsen, A., & Henning, C. H. (2009). Imposing regional monotonicity on translog stochastic production frontiers with a simple three-step procedure. *Journal of Productivity Analysis*, 32(3), 217-229.

Henningsen, A. og Hansen, K.-T. (2017). Parsimonious Functional Forms for Multiple-Output Cost Functions: Output-Output Relationships. *Papir præsenteret på den 15. Europæiske Workshop for Efficiens- og Produktivitetsanalyse, London, 14. juni*.

Henningsen, A. (2019). *Introduction to Econometric Production Analysis with R*. Fourth edition. Tilgængelig online på: <https://leanpub.com/ProdEconR/>

Meeusen, W., & van Den Broeck, J. (1977). Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. *International economic review*, 435-444.

---

# Appendiks 1

I arbejdet med videreudviklingen af Forsyningssekretariatets SFA-model er der arbejdet med fire funktionsformer ud over Cobb-Douglas og translog. For at vise, hvorfor disse er ikke er udvalgt til benchmarking med SFA, gennemgås de kort her.

## Normaliseret lineær

Den normaliserede funktionsform ses af og til anvendt til estimation af omkostningsfunktioner. Den er defineret ved:

$$\frac{c(w, y, z)}{y_M} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{M-1} \beta_i \frac{y_i}{y_M} + v + u \quad (\text{a.1})$$

Hvor  $c(\cdot)$  er omkostningsfunktionen,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_i$  og  $\beta_i$  er parametre,  $y_i$  er de outputmængder, som ikke bruges til normalisering af funktionen,  $y_M$  er den normaliserende outputmængde,  $v$  er fejllid og  $u$  er inefficiensled.

Den primære ulempe ved den normaliserede funktionsform er, at valget af  $y_M$  er arbitrært, hvorfor modellens estimater vil variere afhængigt af valget. I SFA medfører dette en væsentlig ulempe, som først er tydelig, når omkostningsfunktionen bliver isoleret:

$$c(w, y, z) = y_M \left( \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{M-1} \beta_i \frac{y_i}{y_M} \right) + y_N v + y_M u \quad (\text{a.2})$$

Af formel (a.2) fremgår det, at fejl- og inefficiensleddet er proportionalt med det arbitrære valg af den normaliserende outputmængde. Derudover har formen nogle restriktive antagelser om bl.a. produktionsteknologien, fx at der altid er konstant skalaafkast. Derfor er formen vurderet mindre velegnet til benchmarking af vandsektoren i 2020.

## Symmetrisk normaliseret

Den symmetrisk normaliserede funktionsform er en anden metode til normalisering af data i modellen. Den er defineret ved:

$$\frac{c(w, y, z)}{Y} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{M-1} \beta_i \frac{y_i}{Y} + v + u \quad (\text{a.3})$$

Hvor  $c(\cdot)$  er omkostningsfunktionen,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_i$  og  $\beta_i$  er parametre,  $y_i$  er de outputmængder og  $Y$  er den aggregerede, normaliserende outputmængde,  $v$  er fejllid og  $u$  er inefficiensled. Som det kan ses af formel (a.3) er der en outputmængde som skal udelades fra funktionen. Det skyldes, at variablene er lineært afhængige.

Der er ikke nogle faste metoder til, hvordan man skal beregne  $Y$ . En metode, som foreslås af Henningsen og Hansen (2017), er:

$$Y_{(j)} = \sum_{i=1}^M \frac{y_{i(j)}}{\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K y_{i(j)}} \quad (\text{a.4})$$

Hvor  $Y_{(j)}$  er den normaliserende outputmængde for selskab  $j$ ,  $M$  er antallet af output,  $K$  er antallet af observationer, og  $y_{i(j)}$  er mængden af output  $i$  for selskab  $j$ . Formel (a.4) aggregerer altså alle output for et selskab, hvor den specifikke observation deles med middelværdien for datasættet.

Ligesom ved den normaliserede funktionsform, er fejl-, og inefficiensleddet proportionalt med  $Y$ :

$$c(w, y, z) = Y \left( \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{M-1} \beta_i \frac{y_i}{y_M} \right) + Yv + Yu \quad (\text{a.5})$$

Det betyder, at det bliver metoden for beregning af  $Y$  som bliver relevant. Foretages en velfunderet aggregering som i formel (a.4), er det dog af mindre betydning, da der kun er én outputmængde,  $Y$ , som kan avendes til normaliseringen. Med velfunderet menes en aggregering, som giver pæne fordelinger af de variable, som indgår i estimationen.

Grunden til at denne funktionsform ikke er vurderet velegnet til benchmarking af vandsektoren i 2020 er bl.a., at formen har nogle restriktive antagelser om bl.a. produktionsteknologien, fx at der altid er konstant skalaafkast.

### Stochastic Ray-funktioner

Denne funktionsform adskiller sig fra de øvrige funktionsformer heri, idet stochastic ray-modeller baseres på det polare koordinatsystem frem for det almindelige kartesiske koordinatsystem. Det polare koordinatsystem er bygget grundlæggende anderledes op, idet det er defineret ud fra et udgangspunkt kaldet polen, hvorfra der sættes en retning kaldet den polare akse. Ud fra denne defineres outputmængderne som en vinkel mellem polen og den polare akse, samt afstanden fra polen. Den er defineret ved (Henningsen og Hansen (2017)):

$$\log(c(w, y, z)) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \log(w_i) + \sum_{i=1}^{M-1} \beta_i \varphi_i + \beta_M \log(\|y\|) + v + u \quad (\text{a.6})$$

Hvor  $\alpha_0 = \log(A)$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  og  $\beta_M$  er parametre,  $\varphi_i = \arccos \frac{y_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^M y_j^2}} \forall i = 1, \dots, M - 1$  er vinklerne mellem vektorerne af outputmængderne og  $\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^M y_i^2}$  er længden af vektoren af outputs.

Denne funktionsform er vurderet mindre velegnet til benchmarking af vandsektoren i 2020, idet den laver nogle af de samme antagelser om produktionsteknologien som den kartesiske Cobb-Douglas form beskrevet i Boks 2.1. Fx antages det, at skalaafkastet ikke varierer på tværs af produktionstørrelsen. Den opfylder dog ofte antagelsen om konkave transformationskurver, hvilket gør den mere konsistent mht. mikroøkonomisk teori end den kartesiske Cobb-Douglas.

Det bemærkes, at der også findes en stochastic ray translog-omkostningsfunktion. Den har mange fordele, herunder at den fx altid har konkave transformationskurver og er fleksibel i forhold til produktionsteknologien. Ulemperne ved en SFA-model med en stochastic ray translog-omkostningsfunktion er, at resultaterne afhænger af måleenheden for outputmængderne og den rækkefølge de indgår i modelspecifikationen. Der findes dog metoder, som kan imødegå disse udfordringer.

Disse omkostningsfunktioner er imidlertid defineret på det polare koordinatsystem og vil derfor kræve væsentligt mere analysearbejde, hvis de skal indarbejdes i SFA-modellen. På den baggrund anvendes funktionsformerne ikke til benchmarking af drikkevandsektoren i 2020.