

## **Bilag 5: DEA-modellen**

Bilaget indeholder en teknisk beskrivelse af DEA-modellen

**FORSYNINGSSSEKRETARIATET**

<b>INDLEDNING .....</b>	<b>3</b>
<b>INPUTSTYRET DEA-MODEL .....</b>	<b>3</b>
<b>OUTPUTSTYRET DEA-MODEL .....</b>	<b>7</b>
<b>SKALAAFKAST.....</b>	<b>12</b>

## Indledning

*Data envelopment analysis* (DEA) er en matematisk metode, der anvender lineær programmering til at sammenligne en række forsyninger med hinanden og bestemme effektiviteten af de forskellige forsyninger.

Forsyningerne sammenlignes på baggrund af et sæt af inputs og outputs. Inputs er det, en forsyning anvender til at producere. Outputs er det en forsyning producerer.

Ud fra de mest effektive forsyninger bestemmer DEA en rand som omslutter alle forsyninger. Randen kaldes en effektivitetsfront og de mest effektive forsyninger ligger på denne effektivitetsfront. Forsyninger, der ikke ligger på effektivitetsfronten, er ineffektive. Jo længere fra effektivitetsfronten, en forsyning befinder sig, jo mindre effektiv er forsyningen. Effektiviseringsfronten afhænger af sammenhængen mellem inputs og outputs. Sammenhængen mellem inputs og outputs kaldes for skalaafkast.

De mest effektive forsyninger angiver DEA til at være 100 pct. effektive. For de ineffektive forsyninger angiver DEA hvor effektive de er i forhold til de mest effektive selskaber, f.eks. kan en ineffektiv forsyning være 85 pct. effektiv.

DEA-modellen kan grundlæggende antage to former. Modellen kan være inputstyret eller outputstyret. Den inputstyrede model antager, at output er fast, og at input kan styres af forsyningen. DEA beregner derfor effektiviteten ved at minimere input for en fastholdt mængde af output. Den outputstyrede model antager, at input er fast, og at output kan styres af forsyningen. DEA beregner derfor effektiviteten ved at maksimere output for en fastholdt mængde af input.

Alt efter om modellen er inputstyret eller outputstyret, kan det betyde to forskellige ting, at en forsyning er 85 pct. effektiv. I en inputstyret model betyder det at forsyningen kan sænke sit input med 15 pct. (100 pct.- 85 pct.) og producere den samme mængde output. I en outputstyret model betyder det at forsyningen kan øge sit output med 15 pct. uden at ændre mængden af input. De 15 pct. kaldes effektiviseringspotentialet.

I det følgende beskrives først den inputstyrede DEA-model, derefter den outputstyrede DEA-model og til slut beskrives skalaafkast.

## Inputstyret DEA-model

Den inputstyrede DEA-model beregner effektiviteten ved at minimere input for en fastholdt mængde af output. Den matematiske model er angivet i boks 1 nedenfor.

### Boks 1: Den inputstyrede DEA-model med konstant skalaafkast.

$$\begin{array}{l} \min_{\theta^O, \lambda_1, \dots, \lambda_K} \theta^O \\ \text{ub. } \sum_{k=1}^K \lambda_k x_m^k \leq \theta^O x_m^O, m = 1, \dots, M \quad (1) \\ \sum_{k=1}^K \lambda_k y_n^k \geq y_n^O, n = 1, \dots, N \quad (2) \\ \lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, K \quad (3) \end{array}$$

$\theta^O$  : Mål for effektivitet for forsyning O  
 $x_m^k$  : Input m for forsyning k  
 $y_n^k$  : Output n for forsyning k  
 $M$  : Antal input  
 $N$  : Antal output  
 $K$  : Antal forsyninger  
 $O$  : Forsyning n der bliver betragtet

I boks 1 angiver  $x_m^O$  mængden af input  $m$  for forsyning O og  $y_n^O$  angiver mængden af input  $n$  for forsyning O, som er den forsyning, der bliver betragtet i ovenstående model.

$\theta$  angiver et mål for effektiviteten af den enkelte forsyning. Modellen skal løses for alle K forsyninger, således at der er bestemt et  $\theta$  for hver af de K forsyninger. Modellen bestemmer en løsning ved at ændre på  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$  og  $\theta$  således at  $\theta$  er optimal under bibetingelserne. Idet modellen skal løses for hver enkel forsyning bliver  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$  og  $\theta$  valgt på ny for hver enkel forsyning. Disse vælges derfor, så hver enkel forsyning bliver stillet bedst muligt.

Effektivitetsmålet  $\theta$  vil altid være mellem 0 og 1. Hvis  $\theta = 1$  er forsyningen 100 pct. effektiv og forsyningen ligger på effektivitetsfronten. Hvis  $\theta = 0,85$  er forsyningen 85 pct. effektiv. Effektiviseringspotentialet er 15 pct.  $((1-0,85) \cdot 100 \text{ pct.})$ , dvs. forsyningen kan sænke sit input med 15 pct. uden at ændre sit output.

Bibetingelse 1 og 2 i boks 1 kan være opfyldt med lighedstegn eller med skarpt ulighedstegn ( $<$  og  $>$ ). Når en bibetingelse er opfyldt med lighedstegn siges den at være *bindende*. Hvis en bibetingelse ikke er bindende kaldes den en *ikke-bindende* bibetingelse. Ved en ikke-bindende bibetingelse er der en forskel mellem venstre side og højre side af bibetingelsen. Denne forskel kaldes for *slack*. Ved at lægge slacken til på den ene side opnås en bindende bibetingelse.

Bibetingelse 1 angiver, for hvert input, at en lineær kombination af hvert input skal være mindre end forsyning O's input ganget med forsyning O's effektivitet. Hvis denne bibetingelse, for et input, er ikke-bindende betyder dette at den betragtede forsyning har et input-slack. Forsyningen kan derfor sænke sit forbrug af input uden at ændre den producerede mængde af outputs.

Bibetingelse 2 angiver, for hvert output, at en lineær kombination af hvert output skal være større end forsyning O's output. Hvis denne bibetingelse, for et output, er ikke-bindende betyder dette at den betragtede forsyning har output-slack. Forsyningen kan derfor øge mængden af output ved brug af den samme mængde af inputs.

Bibetingelse 3 angiver typen af skalaafkast i modellen. I dette tilfælde er der konstant skalaafkast.

En forsyning, der ligger på effektivitetsfronten, kan godt have input- og/eller output-slack. DEA-modellen vurderer dog alligevel denne forsyning til at være 100 pct. effektiv, idet DEA-modellen kun ser på proportionale reduktioner i alle inputs og ikke ser på om nogle inputs kan reduceres mere. Hvis en forsyning har input- og/eller outputs-lacks kan forsyningen ved input-slack reducere sit forbrug af inputs uden at mindske mængden af output, og ved output-slack kan forsyningen øge mængden af output uden at øge forbruget af inputs. Selvom en forsyning ligger på effektivitetsfronten kan den godt ligge bedre, såfremt der er input- og/eller output-slack.

### Eksempel på anvendelse af den inputstyrede DEA-model

I det følgende gennemgås et eksempel på anvendelsen af den inputstyrede DEA-model.

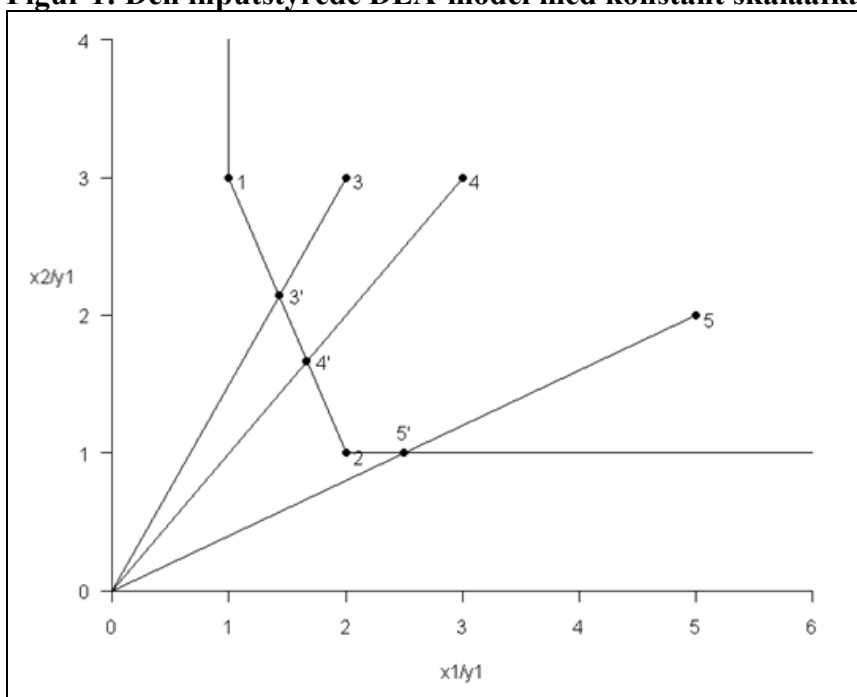
Der ses på en situation, hvor effektiviteten blandt fem forsyninger skal findes. De fem forsyninger benytter sig hver især af to slags input  $x_1$  og  $x_2$  til at producere en slags output  $y_1$ , jf. tabel 1:

**Tabel 1: Eksempel på fem forsyningers produktioner.**

Forsyning	$y_1$	$x_1$	$x_2$	$x_1/y_1$	$x_2/y_1$
1	2	2	6	1	3
2	1	2	1	2	1
3	3	6	9	2	3
4	2	6	6	3	3
5	1	5	2	5	2

De to sidste kolonner angiver, hvor meget af hvert input der bruges til at producere én enhed af output. Disse to kolonner kan illustrere forsyningernes effektivitet som vist i figur 1. Forsyningernes input-mix er indsat som punkter markeret med deres nummer. De tal, der er efterfulgt af et mærke, kan i første omgang ignoreres.

**Figur 1: Den inputstyrede DEA-model med konstant skalaafkast.**



Forsyning 1 og 2 er de mest effektive forsyninger, fordi de anvender den mindste samlede mængde af inputs til at producere ét output, jf. de to sidste kolonner i tabel 1 ovenfor. Effektivitetsfronten udgøres derfor af den linje der forbinder forsyning 1 og 2 samt de to linjer der udgår fra forsyning 1 og 2. Området over effektivitetsfronten er det gennemførlige område, dvs. kombinationer (af  $x_1/y_1$  og  $x_2/y_1$ ) der ligger i dette område er mulige. Forsyninger der ligger i det gennemførlige område, men ikke på effektivitetsfronten, er ineffektive.

Forsyning 3, 4 og 5 er ineffektive og ligger derfor ikke på effektivitetsfronten, men i det gennemførlige område. F.eks. anvender forsyning 3 mere af input  $x_1$  end forsyning 1 til at producere én enhed output. Forsyning 3 er derfor ineffektiv. Der kan argumenteres tilsvarende for forsyning 4 og 5.

Det ses af figur 1 at forsyning 5 er den mindst effektive forsyning, fordi denne befinder sig relativt længere fra fronten end forsyning 3 og 4. Udregnes  $\theta$  og  $\lambda_k$ , fås følgende:

**Tabel 1: Resultat af DEA-analyse**

Forsyning nr. $k$	$\theta$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
1	1,0	1,0	0	0	0	0
2	1,0	0	1,0	0	0	0
3	0,714	0,857	1,286	0	0	0
4	0,556	0,333	1,333	0	0	0
5	0,5	0	1,0	0	0	0

Udregningen af  $\theta$  bekræfter ovenstående grafiske fortolkning, idet forsyning 1 og 2 har  $\theta=1$ , og de øvrige forsyninger har  $\theta < 1$  med det laveste  $\theta$  for forsyning 5. At  $\theta_3 = 0,714$  for forsyning 3, betyder, at brugen af samtlige inputs kan reduceres med  $(1 - 0,713) \cdot 100\text{pct.} = 28,7\text{pct.}$ , uden at størrelsen på outputtet ændres.

De forsyninger, der er efterfulgt af et mærke, angiver de ineffektive forsyningers projektion på effektivitetsfronten. Her angiver  $\lambda$ -værdierne hvilken lineær kombination af de mest effektive forsyninger som en given forsyning kan opnå, det vil sige  $\lambda$ -værdierne beskriver, hvor på effektivitetsfronten en ineffektiv forsyning kan placere sig, hvis den reducerer samtlige inputs med samme andel uden at ændre mængden af output. Betragt f.eks. projektionen af forsyning 3 på effektivitetsfronten. Punktet 3' er en lineær kombination af punkterne 1 og 2 med  $\lambda_1 = 0,857$  og  $\lambda_2 = 1,286$  som vægte.

Punktet 5' er specielt interessant, idet denne forsyning i punkt 5' vil være 100 pct. effektiv ifølge DEA-modellen, men kan reducere mængden af input  $x_1$  indtil punktet 2 opnås uden at ændre mængden af outputs. Det vil sige, for forsyning 5 er der input-slack. Da DEA-modellen ser på et proportionalt reduktion i begge inputs, ser DEA-modellen bort fra en eventuelt ekstra reduktion i et enkelt input.

## Outputstyret DEA-model

Den outputstyrede DEA-model beregner effektiviteten ved at maksimere output for en fastholdt mængde af input. Den matematiske model er angivet i boks 2 nedenfor.

## Boks 2: Den outputstyrede DEA-model med konstant skalaafkast.

$$\begin{aligned} & \min_{\phi^O, \lambda_1, \dots, \lambda_K} \phi^O \\ \text{ub.} \quad & \sum_{k=1}^K \lambda_k x_m^k \leq x_m^O, m = 1, \dots, M \quad (1) \\ & \sum_{k=1}^K \lambda_k y_n^k \geq \phi^O y_n^O, n = 1, \dots, N \quad (2) \\ & \lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, K \quad (3) \end{aligned}$$

$\phi^O$  : Mål for effektivitet for forsyning O  
 $x_m^k$  : Input m for forsyning k  
 $y_n^k$  : Output n for forsyning k  
 $M$  : Antal input  
 $N$  : Antal output  
 $K$  : Antal forsyninger  
 $O$  : Forsyning n der bliver betragtet

I boks 2 angiver  $x_m^O$  mængden af input  $m$  for forsyning O og  $y_n^O$  angiver mængden af input  $n$  for forsyning O, som er den forsyning der bliver betragtet i ovenstående model.

$\phi$  angiver et mål for effektiviteten af den enkelte forsyning. Modellen skal løses for alle K forsyninger, således at der er bestemt et  $\phi$  for hver af de K forsyninger. Modellen bestemmer en løsning ved at ændre på  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$  og  $\phi$  således at  $\phi$  er optimal under bibetingelserne. Idet modellen skal løses for hver enkel forsyning bliver  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$  og  $\phi$  valgt på ny for hver enkel forsyning. Disse vælges derfor så hver enkel forsyning bliver stillet bedst muligt.

Effektivitetsmålet  $\phi$  vil altid være mellem 1 og uendelig. Effektiviteten beregnes som  $1/\phi$  som altid vil være mellem 0 og 1. Hvis  $\phi = 1/\phi = 1$  er forsyningen 100 pct. effektiv og forsyningen ligger på effektivitetsfronten. Hvis  $1/\phi = 0,85$  er forsyningen 85 pct. effektiv. Effektiviseringspotentialet er derfor 15 pct. det vil sige, forsyningen kan øge sit output med 15 pct. uden at ændre sit input.

Bibetingelse 1 og 2 i boks 2 kan være opfyldt med lighedstegn eller med skarpt ulighedstegn ( $<$  og  $>$ ). Når en bibetingelse er opfyldt med lighedstegn siges den at være *bindende*. Hvis en bibetingelse ikke er bindende kaldes den en *ikke-bindende* bibetingelse. Ved en ikke-bindende bibetingelse er der en forskel mellem venstre side og højre side af bibetingelsen. Denne forskel kaldes for *slack*. Ved at lægge slacken til på den ene side opnås en bindende bibetingelse.



Bibetingelse 1 angiver, for hvert input, at en lineær kombination af hvert input skal være mindre end forsyning O's. Hvis denne bibetingelse, for et input, er ikke-bindende betyder dette at den betragtede forsyning har et input-slack. Forsyningen kan derfor sænke sit forbrug af input uden at ændre den producerede mængde af outputs.

Bibetingelse 2 angiver, for hvert output, at en lineær kombination af hvert output skal være større end forsyning O's output ganget med forsyning O's effektivitet. Hvis denne bibetingelse, for et output, er ikke-bindende betyder dette, at den betragtede forsyning har et output-slack. Forsyningen kan derfor øge mængden af output ved brug af den samme mængde af inputs.

Bibetingelse 3 angiver typen af skalaafkast i modellen. I dette tilfælde er der konstant skalaafkast.

En forsyning, der ligger på effektivitetsfronten, kan godt have input- og/eller output-slack. DEA-modellen vurderer dog alligevel denne forsyning til at være 100 pct. effektiv, idet DEA-modellen kun ser på proportionale stigninger i alle outputs og ikke ser på om nogle outputs kan øges mere. Hvis en forsyning har input- og/eller outputs lacks kan forsyningen ved input-slack reducere sit forbrug af inputs uden at mindske mængden af output, og ved output-slack kan forsyningen øge mængden af output uden at øge forbruget af inputs. Selvom en forsyning ligger på effektivitetsfronten kan den godt ligge bedre såfremt der er input- og/eller output-slack.

### **Eksempel på anvendelse af den outputstyrede DEA-model**

I det følgende gennemgås et eksempel på anvendelsen af den outputstyrede DEA-model.

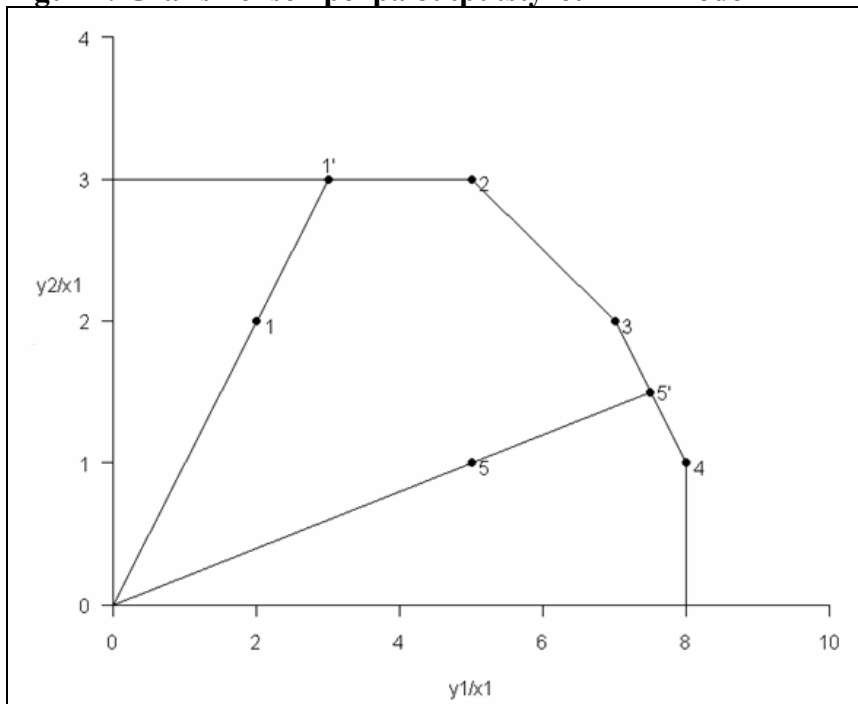
Der ses på en situation, hvor effektiviteten blandt fem forsyninger skal findes. De fem forsyninger benytter sig hver især af ét slags input  $x_1$  til at producere to slags output  $y_1$  og  $y_2$ , jf. tabel 2. For overskuelighedens skyld er mængden af input normaliseret til 1 for alle forsyningerne.

**Tabel 2: Eksempel på fem forsyningers produktioner.**

Forsyning	$x_1$	$y_1$	$y_2$
1	1	2	2
2	1	5	3
3	1	7	2
4	1	8	1
5	1	5	1

I figur 2 er de to sidste kolonner indtegnet for grafisk at vise effektiviteten af de fem forsyninger. De fem forsyninger er markeret med deres nummer. De tal der er efterfulgt af et mærke kan i første omgang ignoreres.

**Figur 2: Grafisk eksempel på outputstyret DEA-model**



Forsyning 2, 3 og 4 er de mest effektive forsyninger, fordi de producerer den største samlede mængde output ved brug af én enhed input, jf. de to sidste kolonner i tabel 2 ovenfor. Effektivitetsfronten udgøres derfor af den linje der forbinder forsyning 2 og 3, den linje der forbinder forsyning 3 og 4 samt de to linjer der forbinder forsyning 4 og 2 med hhv. første- og anden aksens. Området under effektivitetsfronten er det gennemførlige område, det vil sige, kombinationer (af  $y_1/x_1$  og  $y_2/x_1$ ) der ligger i dette område er mulige. Forsyninger der ligger i det gennemførlige område, men ikke på effektivitetsfronten, er ineffektive.

Forsyning 1 og 5 er ineffektive og ligger derfor ikke på effektivitetsfronten, men i det gennemførlige område. F.eks. producerer forsyning 4 mere af output  $y_1$  pr. enhed input end forsyning 5 og anvender derfor deres input mere effektivt end forsyning 5. Forsyning 5 er derfor ineffektiv.

Punkterne 1' og 5' angiver projektionen af forsyning 1 og 5 på effektivitetsfronten. Punktet 1' er specielt interessant, idet denne forsyning i punkt 1' er 100 pct. effektiv ifølge DEA-modellen, men kan øge mængden af output  $y_1$  indtil punktet 2 opnås uden at ændre mængden af input. Det vil sige, for forsyning 1 er der output-slack. Da DEA-modellen ser på en proportional stigning i begge outputs, ser DEA-modellen bort fra en eventuel ekstra stigning i et enkelt output.

### Eksempel på mål af effektivitet i en inputstyret og en outputstyret DEA-model

I det følgende gennemgås et eksempel på forskellen i måden at måle effektiviteten på i den inputstyrede og den outputstyrede DEA-model.

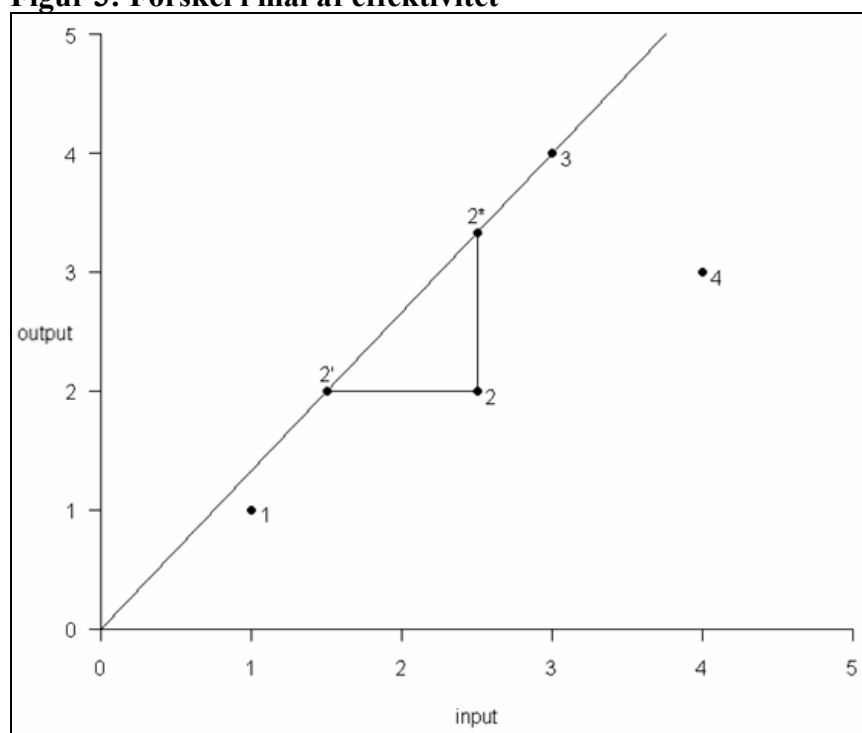
For overskuelighedens skyld ses på fire forsyninger som bruger et input til at producere et output, jf. tabel 3:

**Tabel 3: Eksempel på fire forsyningers produktioner.**

Forsyning	$x_1$	$y_1$
1	1	1
2	2,5	2
3	3	4
4	4	3

De fire forsyningers kombinationer af input og output er indtegnet i figur 3. Det ses, at forsyning 3 er den mest effektive forsyning og effektivitetsfronten udgøres derfor af en ret linje gennem origo ((0,0)) og forsyning 3's placering. Området under effektivitetsfronten er det gennemførlige område.

**Figur 3: Forskel i mål af effektivitet**



Forsyning 1, 2 og 4 er ineffektive. Typen af DEA-model bestemmer hvordan effektiviteten måles.

Hvis DEA-modellen er inputstyret, antager modellen, at input-mængden kan styres af forsyningen, men at output er fast. DEA-modellen måler derfor

effektiviteten af f.eks. forsyning 2 ved at fastholde output-mængden, og undersøge hvor meget input-mængden kan reduceres. I dette tilfælde kan forsyning 2 reducere mængden af input indtil forsyningen når punktet 2'.

Hvis DEA-modellen er outputstyret, antager modellen, at output-mængden kan styres af forsyningen, men at input er fast. DEA-modellen måler derfor effektiviteten af f.eks. forsyning 2 ved at fastholde input-mængden og undersøge, hvor meget output-mængden kan øges. I dette tilfælde kan forsyning 2 øge mængden af output til forsyningen når punktet 2\*.

## Skalaafkast

Effektivitetsfronten afhænger af typen af skalaafkast. En ændring af typen af skalaafkast i DEA-modellen fra konstant skalaafkast til en af de andre typer ændrer derfor forsyningernes målte effektivitet. Faktisk vil forsyningernes effektivitet øges eller forblive de samme.

Der er fire typer af skalaafkast: konstant, variabelt, ikke-voksende og ikke-aftagende skalaafkast.

Konstant skalaafkast betyder, at mængden af output vokser med samme hastighed som mængden af input. Det vil sige, hvis mængden af input fordobles, fordobles mængden af output også. Ved konstant skalaafkast kan en ineffektiv forsyning blive benchmarket mod alle andre forsyninger uafhængigt af størrelsen.

Ikke-voksende skalaafkast betyder, at mængden af output vokser med en mindre hastighed end mængden af input. Det vil sige, en fordobling af mængden af input fører til en stigning i mængden af output, der er mindre end en fordobling. Ikke-voksende skalaafkast sikrer, at en ineffektiv forsyning ikke benchmarkes mod forsyninger, der er væsentlig større, men forsyningen kan godt blive benchmarket mod mindre – og væsentlig mindre – forsyninger.

Ikke-aftagende skalaafkast betyder, at mængden af output vokser med en større hastighed end mængden af input. Det vil sige, en fordobling af mængden af input fører til en stigning i mængden af output, der er større end en fordobling. Ikke-aftagende skalaafkast sikrer, at en ineffektiv forsyning ikke benchmarkes mod forsyninger, der er væsentlig mindre, men forsyningen kan godt blive benchmarket mod større – og væsentlig større – forsyninger.

Variabelt skalaafkast er en kombination af ikke-voksende og ikke-aftagende skalaafkast. Variabelt skalaafkast sikrer, at en ineffektiv forsyning kun benchmarkes mod forsyninger af nogenlunde samme størrelse.

I boks 1 og boks 2 er der anført konstant skalaafkast. I boks 3 er angivet hvilken betingelse der skal indføres i DEA-modellen alt efter hvilken type skalaafkast man ønsker.

### Boks 3: Typer af skalaafkast og formulering af bibetingelser

Konstant skalaafkast:  $\lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, K$

Variabelt skalaafkast:  $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$  og  $\lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, K$

Ikke - voksende skalaafkast:  $\sum_{k=1}^K \lambda_k \leq 1$  og  $\lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, K$

Ikke - aftagende skalaafkast:  $\sum_{k=1}^K \lambda_k \geq 1$  og  $\lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, K$

I figur 4 er tilfældet med ét input og ét output illustreret for de fire typer af skalaafkast.

Figur 4: Grafisk illustration af skalaafkast

